

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä vaan omaasi. Laskut tulee suorittaa käsin, ellei toisin mainita.

Demonstraatio 5 11.12.2025

1. Osoita että

$$|x_1 + \dots + x_n|^2 \leq n(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2).$$

Ohje: Käytä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä sopivasti valitulla vektorilla $\mathbf{y}$.

2. Osoita, että välillä $[a, b]$ määriteltyille jatkuville reaalfunktiolle f pätee

$$\left(\int_a^b g\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b g^2.$$

Ohje: Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö sopivasti valitulle funktiolle f .

3. Olkoon A symmetrinen ($A^T = A$) ja positiividefiniitti ($\mathbf{x}A\mathbf{x}^T > 0$ aina, jos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$). Osoita, että $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^T$ toteuttaa sisätulon ehdot.

4. Olkoon $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$, ja $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo.

Sijoita vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ kantaesitykset sisätuloon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ja esitä tämä kanta-vektoreiden sisätulojen $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$ avulla.

Vertaa näin saatua lauseketta matriisituloon

$$(x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Mitä voit todeta matriisista M , erityisesti sen matriisialkioista?

5. Olkoon $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ sisätulon indusoima normi. Osoita, että tällöin

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2. \quad (1)$$

Selitä miksi yhtälöä (1) kutsutaan *suunnikassäännöksi*.

6. Osoita, että $\mathbb{R}^2$:ssa määritelty normi $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ ei aina toteuta suunnikassääntöä. Ohje: Etsi vektorit, jolle suunnikassääntö ei toteudu.

7. Olkoon $\{\underbrace{(1, 2, 3)}_{\mathbf{b}_1}, \underbrace{(2, 3, 1)}_{\mathbf{b}_3}, \underbrace{(3, 2, 1)}_{\mathbf{b}_3}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta (miksi se on kanta?).

”Julistetaan” tämä kanta ortonormaaliksi määrittelemällä sisätulo, jossa

$$(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$$

Selvitä mitä on $((3, 3, 6), (0, -2, 2))$. Ohje: Etsi vektorien kantaesitykset. Siinä voi käyttää matematiikkaohjelmaa.

8. Totea laskemalla että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(1, 0, 2), (2, 1, -1), (-2, 5, 1)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen ja etsi vektorille $(-3, 3, 9)$ esitys joukon B vektoreiden lineaarikombinaationa.

9. Totea että vektorijoukko $B_1 = \{(1, 1, -1), (0, 2, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ on lineaarisesti riippumaton. Käytä luennolla esitettyä Gramin-Schmidtin menetelmää ja esitä jokin jokin ortogonaali (tavallisen pistetulon suhteen) vektorijoukko B_2 , joka generoi saman aliavaruuden kuin B_1 .