

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Kurssin yleistiedot

Kurssin verkkosivu

Perehdy verkkosivun informaatioon:

<https://users.utu.fi/mikhirve/ins2526/Perustiedot/>

Luennot ja demot

Luennot ti 14-16 ja ke 14-16 yleensä etäyhteydellä.

Demoajankohdat to 8-10, 10-12, 12-14, 14-16. Kaikkia ryhmiä ei toteuteta. Suoritustavoista ja poikkeuksista kerrotaan kurssin verkkosivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 40% ja läpäistävä loppuentti.

Tenttipäivät

Löytyvät opinto-oppaasta.

Tavoitteet

Kurssilla esitetään matematiikan peruskäsitteitä: Logiikan merkinnät, reaalityöt, elementaariset reaalifunktiot, ja kompleksityöt. Nämä luovat pohjaa seuraavia insinöörimatematiikan kursseja varten.

Sisältö

Matematiikan merkintöjä, tavallisimmat reaalifunktiot, kompleksityöt.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).
- Kreikkalainen kukoistuskausi n. 300–100 eaa.
- Uuden ajan matematiikka 1600-luku → nykypäivä.

- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Ei operationaalista kytkentää reaailimaailmaan
- Onko

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

"totta"?

- Kaikki matemaattiset teorat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa.
- Teorian peruskäsitteet ja -oliot esitetään määritelmänä ja niiden väliset suhteet tai *aksioomina*.
- Kaikki muut teorian väittämät (lauseet, teoreemat) johdetaan aksioomista loogisesti.
- Matemaattinen teoria: Niiden lauseiden joukko, jotka voidaan johtaa aksioomista.

Vaatimuksia aksiomatiikalle

- Peruskäsitteiden ja aksioomien pitäisi olla yksinkertaisia
- Aksioomia pitäisi olla vähän
- Aksioomien pitäisi olla ristiriidattomia

Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille

Peruskäsitteet: Joukko $\mathbb{N}$, luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luvun n seuraaja $s(n)$.

Aksioomat:

- 1 Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
- 2 Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
- 3 Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksiooma*).

Päättelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
 - Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Päätelyn epämuodollinen esitys

• $\Rightarrow$

• $\Leftrightarrow$

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	$\kappa, \varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\forall$ (universaalikvanttori)
- $\exists$ (eksistentiaalikvanttori)

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 3| < \delta \rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ , että ehdosta $|x - 3| < \delta$ seuraa $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaationsymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.
- Erittäin yksinkertainen teoreettinen perusta matematiikalle.

Tärkeimmät lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.