

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaationsymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.
- Erittäin yksinkertainen teoreettinen perusta matematiikalle.

Tärkeimmät lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Lukuvälit

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)



Gottlob Frege (1848—1925)

- Propositio- ja predikaattilogiikka
- Matematiikan perusteet: Grundgesetze der Arithmetik (vol. 1 (1893), vol. 2 (1903))

Russellin paradoksi (1901)



Bertrand Russell (1872–1970)

Olkoon $A = \{X \mid X \notin X\}$. Onko $A \in A$?

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1, 2, 3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkia n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkia voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Esimerkki

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7! \cdot 33!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7!} = 18643560$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$\binom{m}{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \binom{m}{k},$$

$$\binom{m}{m} = \binom{m}{m-m} = \binom{m}{0} = 1$$

Lause

Jos $1 \leq n \leq m - 1$, niin

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Todistus

$$\begin{aligned}\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} &= \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} \\ &= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)!}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.\end{aligned}$$

Pascalin kolmio

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 & & \dots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & & \dots & & & &
 \end{array}$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(aa + ab + ba + bb) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a + b)^n = aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- $C(n, k)$ on niiden yhteenlaskettavien määrä, jossa on k kpl b :tä.
- Kuinka monella tavalla voidaan valita n -pituisen jonon k jonon jäsentä b :ksi (lopun a :ksi)?
- $C(n, k) = \binom{n}{k}$.

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkioit 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.

Kunta-aksioomat:

- 1 Kaikille reaaliluvuille a , b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- 2 Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
- 3 Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
- 4 Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
- 5 kaikille reaaliluvuille a , b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
- Aksioomissa ei mainita, että kaikille $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$. Tämä on looginen seuraus aksioomista.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio $\geq$ määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Relaatiot $<$ ja $\leq$ määritellään analogisesti.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että $a > c$.

Tehtävä

Mieti miksi pitää olla $1 \in \mathbb{R}_+$ ja miksi $(-1)a = -a$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

siis $ab < cd$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Kolmioepähtälö

Epähtälöä $|x + y| \leq |x| + |y|$ kutsutaan *kolmioepähtälöksi*.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.