

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $$d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$$

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

Esimerkki

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3| d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x + 3| < 4 + 3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja*, *supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja*, *supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa *pienin yläraja*.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Huomautus

Jos valitaan mikä hyvänsä jono rationaalilukuja $r_1 < r_2 < r_3 \dots < M$, niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa sellainen reaaliluku α , jota jono $r_1, r_2, r_3, \dots$ lähestyy. Pienimmän ylärajan ominaisuudesta nimittäin seuraa, että $\forall \epsilon > 0$ $\alpha - \epsilon$ ei ole ko. jonon yläraja, ja siis on olemassa sellainen r_n että $\alpha - \epsilon < r_n < \alpha$.

Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S .

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S . Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $(\exists m) m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m + 1)\epsilon > S$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S . Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $(\exists m) m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m + 1)\epsilon > S$. Mutta $(m + 1)\epsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon yläraja.

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys
- Rationaaliset approksimaatiot.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Esimerkki

Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ei ole injektio, eikä surjektio. Näin ollen sillä ei ole käänteisfunktiota.

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Reaalifunktiot

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ esittää polynomifunktiota

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ esittää polynomifunktiota
- $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$ esittää rationaalifunktiota, joka on määritelty kun $x \neq 1$.

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

EkspONENTTIFUNKTIOT

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Tästä seuraa, että $a^0 = 1$.

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Määritelmä

Olkoon $b > 0$. Luvun b n :s juuri on positiivinen reaaliluku β , joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.

EkspONENTTIFUNKTIOT

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

MÄÄRITELMÄ

Olkoon $b > 0$. Luvun b n :s juuri on positiivinen reaaliluku β , joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.

Edellämainitun perusteella pitää määritellä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu)

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä?

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = a^x$

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta

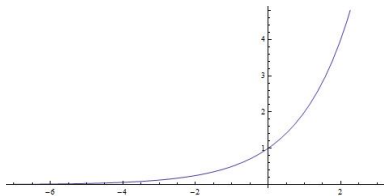
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.

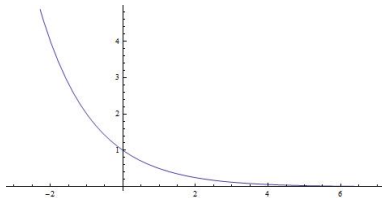
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

$$y = 2^x$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

Logaritmi

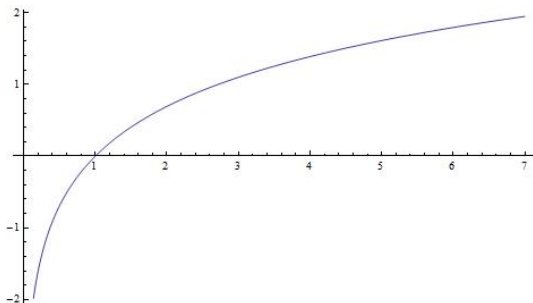
Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

$$y = \ln x = \log_e x, \quad e = 2,71828182845904523536 \dots$$



Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava,

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$,

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$