

Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka:
Matematiikan perustiedot
2025

Sisällys

1	Johdanto	5
1.1	Matematiikan historiasta	5
1.2	Matematiikan opiskelusta	7
1.3	Matematiikan perusteista	7
2	Matematiikan ja logiikan merkintöjä	11
2.1	Kreikkalaiset aakkoset	11
2.2	Termit ja kaavat	11
2.2.1	Termit	11
2.2.2	Atomikaavat	12
2.2.3	Yhdistetyt kaavat ja kvanttorit	14
2.3	Semantiikka	14
2.4	Päätelyn epämuodollisempi esitys	15
2.5	Joukko-opin peruskäsitteet	17
2.6	Vennin diagrammit	19
2.7	Tärkeimmät lukujoukot	19
2.8	Summa- ja tulomerkinnät	20
3	Reaalilukujen perusominaisuudet	23
3.1	Rationaalilukujen epätäydellisyys	23
3.2	Reaalilukujen aksiomatiikka	25
3.3	Aksiomatiikan seurauksia	28
4	Yleisimmät reaalifunktiot	31
4.1	Terminologiaa	31
4.2	Polynomi- ja rationaalifunktiot	32
4.3	Eksponenttifunktiot	33
4.4	Logaritmifunktiot	35
4.5	Trigonometriset funktiot	37
4.6	Trigonometrysten funktioiden ominaisuuksia	39
4.7	Reaalifunktioiden esitystapoja	39
4.8	Binomikaava	40
5	Kompleksiluvut	43
5.1	Kompleksilukujen määritelmä ja peruslaskutoimitukset	43
5.2	Kompleksilukujen graafinen esitys, itseisarvo ja polaariesitys	44
5.3	Kompleksinen eksponenttifunktio ja logaritmi	48
5.4	Kompleksinen potenssinkerotus	49
5.5	Kompleksilukujen trigonometriset funktiot	52
5.6	Algebran peruslause	53
6	Liite	57
6.1	Päätelyn muotoja	57

Luku 1

Johdanto

Turun yliopistossa tekniikan alan opintoja varten on suunniteltu yhdeksän matematiikan kurssin yhteensä 25 opintopisteen laajuinen kokonaisuus:

- **Matematiikan perustiedot** (2 op)
- Differentiaali- ja integraalilaskenta (4 op)
- Lineaarialgebra (4 op)
- Todennäköisyyslaskenta (3 op)
- Diskreetti matematiikka (3 op)
- Differentiaaliyhtälöt (3 op)
- Usean muuttujan funktiot 1 (2 op)
- Usean muuttujan funktiot 2 (2 op)
- Fourier-analyysi (2 op)

Näistä tulee koulutusohjelmakohtaisesti valita suoritettavaksi 20 - 22 opintopistettä. Ohjeita valintaan saa opinto-oppasta tai opinto-ohjaajalta, mutta kaikille yhteisiä ovat joka tapauksessa Matematiikan perustiedot, Differentiaali- ja integraalilaskenta, Lineaarialgebra sekä Todennäköisyyslaskenta. Koulutusohjelmakohtainen valinta tapahtuu siis vasta kevätlukukaudella.

1.1 Matematiikan historiasta

Encyclopædia Britannican hyvin osuvan kuvailun mukaan matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede, joka on kehittynyt yksinkertaisesta lukumäärien laskemisesta, mittaamisesta ja muotojen kuvailusta.

Laskemisen taito vaikuttaa selvästi kirjoitustaitoa vanhemmalta, eikä sen syntyä siksi voi ajoittaa historian tutkimuksen keinoin. Varhaisin laskemiseen viittaava arkeologinen löydös on peräisin Lebombon alueelta Etelä-Afrikasta löydetty paviaanin pohjelu, johon on noin 44 000 vuotta sitten uurrettu 29 viiltoa. Jotkut arkeologit pitävät tätä varhaisimpana todisteena kuun- tai kuukautiskierron päivien laskemisesta.

Vēstonicesta Tšekin alueelta löydetty, noin 30 000 vuoden taakse ajoitettuun suden värttinäluuhun uurretujen viiltojen uskotaan olevan varhaista ns. tukkimiehen kirjanpitoa. Kongon Ishangosta noin 20 000 vuoden taakse ajoitettuun luuhun koverrettujen uurteiden arvellaan esittävän yhteenlaskuja ja niiden vertailua. Arkeologisten löydösten tulkinta on kuitenkin parhaimmillaankin epävarmaa.

Muinaisen Babylonian matematiikalla tarkoitetaan yleensä nykyisen Irakin alueella vallinneiden kulttuurien laskemisen taitoa. Varhaisin näistä lienee sumerilainen kulttuuri, jossa mittausjärjestelmien kehittäminen nousi tärkeään asemaan yli 6 000 vuotta sitten. Varhaisimmat löydetty kertotaulut ajoittuvat noin 4 500 vuoden taakse Babylonian kulttuuripiiriin, ja siellä ovat myös peräisin varhaisimmat abstraktin matematiikan harjoittamisesta kertovat dokumentit. Babylonian muinaisessa matematiikassa käytetty 60-kantainen lukuesitys on jättänyt nykypäivään kestävät jälkensä: ei ole sattumaa että tunti jaetaan 60 minuuttiin ja tämä edelleen 60 sekuntiin. Myös täyden ympyrän astemäärä 360° on samaa perua.

Noin neljän vuosituhannen takaisesta Egyptiläisestä kulttuurista on nykypäiviin säilynyt hyvin tulkittavissa olevia kirjallisia dokumentteja aritmetiikan, lukuteorian, geometrian ja algebran har-

joittamisesta. Erityisesti geometrian kehitykseen muinaisen Egyptin kulttuurissa uskotaan vaikuttaneen peltomaiden uudelleenmittauksen jokavuotisen tarpeen Niilin tulvakauden jälkeen. Löydetyn aineiston perusteella matematiikan harjoittaminen oli kuitenkin pitkään varsin hajanaisten perusteiden varassa, eikä yhtenäistä lähestymistapaa ollut nähtävissä.

Ajanlaskun alkua edeltävinä vuosisatoina matematiikka nousi kreikkalaisessa kulttuurissa kuokistukseen, jolle ei löytynyt vertaista ennen uuden ajan alkua. Thales, Eudoksos, Pythagoras, Eukleides, ja Arkhimedes ovat nimiä, jotka mainitun aikakauden muiden merkittävien filosofien ohella ovat pysyvästi kirjattuna matematiikan historiaan. Eukleides ei pelkästään koonnut aikakautenaan tunnettua matematiikkaa yhteen teokseen, vaan esitti sen myös loogisesti aksiomaattisdeduktiivisessa muodossa. Eukleideen esitystä voidaan nykypäivän standardeilla kritisoida monella tapaa, mutta viimeistään tuolloin matematiikkaa vakiinnutti asemansa tieteenä, jonka kaukaisimmat perusteet ovat suurelta osin säilyneet 2000-luvulle asti. Saavutus on merkittävä, sillä muita nykykriteerein tieteiksi mielletäviä oppikokonaisuuksia ei antiikin aikoina ollut, ja nykyaikaiset luonnontieteet kuten fysiikka ja kemia ovat muotoutuneet vasta 1700-luvulta alkaen, pari vuosituhatta Eukleideen jälkeen.

Vasta 1600-luvulla alkanut ja nykypäiviin jatkuva matematiikan nousukausi Sir Isaac Newtonin ja Gottfried Leibnizin kehittämän differentiaalilaskennan myötä ylitti antiikin ajan kreikkalaisten saavutukset. Nykypäivään asti säilyneistä dokumenteista voidaan havaita jo Arkhimedeen tuntuneen integraalilaskennan oleellisesti sellaisena kuin se nykyisin ymmärretään, mutta kuitenkin todeta, että Arkhimedeen menetelmät integraalien määrittämiseksi olivat niin vaativia, että vain aikansa etevimmät tieteilijät pystyivät niitä käyttämään. Nykypäiviin säilyneiden tietojen mukaan vain Arkhimedes itse on saavuttanut sen ajan integraalilaskennan tavoilla merkittäviä tuloksia, joskin häntä ajallisesti edeltäneen Eudoksoksen nimiin voidaan katsoa tärkeää teoreettista pohdintaa, jonka avulla Arkhimedes saattoi kehittää oman menetelmänsä.

Tilanne muuttui oleellisesti vasta 1600- ja 1700-lukujen aikana, jolloin Newton ja Leibniz kehittivät differentiaalilaskennan. Tämä osoittautui äärimmäisen hyödylliseksi kumppaniksi integraalilaskennalle, ja nykyään ne katsotaan yleensä yhdeksi oppikokonaisuudeksi. Differentiaalilaskenta tarjoaa Arkhimedeen vaikean menetelmän sijasta paljon yksinkertaisemman tavan laskea integraaleja, jotka alkoivatkin kuulua yhä useamman tieteentekijän työkalupakkiin juuri 1700-luvulta alkaen. Differentiaalilaskennan omat peruskäsitteet puolestaan tarjoavat mahdollisuuden esittää eksaktisti suure ja sen muutosnopeus yhtä aikaa, ja tämä epäilemättä oli Newtonin perimmäinen syy kehittää differentiaalilaskentaa.

Kovinkaan usein ei kuule mainittavan arvioita differentiaali- ja integraalilaskennan yhteiskunnallisesta merkityksestä, joten tuotakoon se tässä esille vailla pienintäkään ylikorostusta: Ilman mainittua teoriakokonaisuutta ei nykyisin olisi käytössä internettiä, tietokoneita, puhelimia, tai ylipäänsä juuri mitään sähköllä toimivaa. Teollisen vallankumouksen alkaessa käyttöönotetut lämpövoimakoneet toimivat äärimmäisen alhaisella, vain parin prosentin hyötysuhteella. Differentiaali- ja integraalilaskenta tarjosivat työkalut lämpöopin tarkempaan hallintaan, mikä puolestaan johti erilaiseen tuotekehityksen ja hyötysuhteen kasvuun. Vielä tärkeämpi rooli differentiaali- ja integraalilaskennalla on tarkemmassa mekaniikan ja sähkömagneettisten ilmiöiden kuvaamisessa. Ei ole sattumaa, että matematiikan rinnalle alkoi kehittyä nykyisin tunnettuja tieteenaloja kuten fysiikka ja kemia juuri 1700-luvulla. Voimme edelleen lukea tuon alan tieteentekijöiden töitä ja havaita, että he ovat laatineet omat teoriansa hyödyntäen differentiaali- ja integraalilaskentaa. Edellisen vuosisadan tieteen suuret saavutukset suhteellisuusteoria ja kvanttimekaniikka molemmat niinikään perustuvat hyvin pitkälti differentiaali- ja integraalilaskentaan.

1800-luvun puolivälin jälkeen alkaneen kehityksen myötä matematiikka on jakautunut kymmeneen, jopa satoihin osa-alueisiin, ja ensikatsomalta saattaa näyttää, että joillakin alueilla on varsin vähän tekemistä toistensa kanssa. Syvällisempi perehtyminen kuitenkin paljastaa, että eri osa-alueita yhdistävät useat rakenteelliset piirteet. 1930-luvulta alkanut kehityskulku on johtanut nykyiseen tietojenkäsittelytieteeseen, ja uudemmat matematiikan osa-alueet ovat nousseet yhä tärkeämpään rooliin sovelluksia kehitettäessä. Esimerkiksi nykyinen tekoälyteknologia perustuu moniin 1800- ja 1900-luvulla kehittyneisiin osa-alueisiin.

1.2 Matematiikan opiskelusta

Laajojen matematiikan kokonaisuuksien omaksuminen yleensä helpottuu, mikäli pelkkien laskumenetelmien lisäksi perehdytään myös perusteisiin. Insinöörimatematiikan opintokokonaisuus poikkeaa lukiomatematiikan kursseista luultavasti eniten siinä, että tällä kurssikokonaisuudella perehdytään matematiikan rakenteisiin lukiokursseja syvällisemmin. Kurssin ensimmäinen mieleenpainettava asia onkin seuraava: **ainoa keino matematiikan kunnolliseen osaamiseen kulkee perusteiden ja käsitteiden hyvän hallinnan kautta.**

Opinnot jakautuvat luentoihin ja harjoitustehtäviin. Yleisesti hyväksi koetun käytännön mukaan harjoitustehtävien yhteydessä kannattaa varmistaa, että ratkaisun perustelut tulivat ymmärretyksi. Matematiikan opinnoissa pidetään yleensä oikeita perusteluja tärkeämpinä kuin virheetöntä ratkaisua, sillä oikeiden perustelujen myötä saatu virheellinen ratkaisu johtuu usein helposti korjattavissa olevasta erehdyksestä. Sen sijaan virheelliset perustelut voivat johtaa oikeaan ratkaisuun vain sattumalta.

1.3 Matematiikan perusteista

Matematiikka eroaa luonnontieteistä (esim. fysiikka, kemia, biologia) ja yhteiskuntatieteistä (esim. sosiologia, taloustiede) oleellisesti siinä, että matematiikan väitteitä ei yleensä voida todentaa (*verifioida*) tai kumota (*falsifioida*) empiirisesti, siis havaintojen perusteella. Filosofian termin tämä voidaan ilmaista myös siten, että matematiikan käsitteitä ei kytkeä reaali maailman olioihin operationaalisesti.

Historiallisesta näkökulmasta katsoen on huomautettava että matemaattiset teoriat tosin varsin usein muodostetaan jonkin konkreettisen tarpeen mukaan. Tällöin myös peruskäsitteet, -ominaisuudet ja -suhteet yleensä syntyvät reaali maailman olioista abstraktion (jota suomeksi voitaneen kutsua rakenteiden ja niiden ominaisuuksien tiivistämiseksi tai pelkistämiseksi) kautta. Esimerkiksi lukumäärän käsite on tunnettu jo ihmiskunnan esihistoriassa, mutta *lukuja* yksi, kaksi, kolme, jne. ei sellaisenaan ole fysikaalisina olioina olemassa. Ne ovat ainoastaan ihmismielen abstrakteja eli tiivistettyjä kuvia reaali maailmassa esiintyvistä konkreettisista asiantiloista. Vaikka matemaattisten objektien kuten lukujen toivotaan kuvaavan hyvin reaali maailman käsitteitä (esim. lukumääriä ja niiden yhdistämistä lisäämällä, kertomalla tai vähentämällä), ei matematiikan luku- tai muidenkaan käsitteiden ominaisuuksia voida silti yleisesti perustella havaintojen pohjalta. Havainnot voivat kyllä tukea ja joissain tapauksissa myös kumota matemaattisen väittämän, mutta tyypillisin ongelma nousee siitä tosiseikasta, että matemaattiset teoriat pyrkivät yleensä puhumaan *äärettömästä* määrästä tapauksia, kun taas havainnot voivat kattaa vain äärellisen määrän.

Esimerkki 1. Lukujen liitännäislaki eli *assosiatiivisuus* tarkoittaa sitä, että

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (1.1)$$

olivatpa a , b ja c mitä hyvänsä lukuja. Kun $+$ ymmärretään tavallisena yhteenlaskuna, on hyvin ymmärrettävää, että assosiatiivisuus pätee kaikille reaali maailman lukumäärille. Sen sijaan assosiatiivisuus *matemaattisena* väittämänä ei ole itsestään selvä, sillä luvut a , b , ja c pitää ymmärtää reaali maailmasta riippumattomiksi olioiksi. Sama pätee abstraktien olioiden a , b ja c yhteenlaskulle: sen matemaattinen muoto ei ole konkreettista lukumäärien yhdistämistä, koska matemaattisessa teoriassa a , b ja c ovat vain lukumäärien ideaalisia vastineita, eivätkä lukumääriä. Tämän vuoksi liitännäislakia (1.1) ei voida matemaattista teoriaa muodostettaessa pitää itsestään selvänä, vaan se pitää kirjata teorian perusominaisuudeksi, *aksioomaksi*. Vaihtoehtoisesti perusominaisuudeksi voidaan kirjata jokin muu, josta (1.1) loogisesti seuraa.

Matemaattisessa teoriassa tärkeämpää kuin itse oliot ovat aina niiden väliset *suhteet ja operaatiot*. Juuri tämän vuoksi matematiikan sanotaan olevan *suhteen, rakenteen* ja *järjestyksen* tiede. Käsiteltävien perusolioiden *ontologialla* eli olemassaolon luonteella ei ole merkitystä, vaan ainoastaan sillä, miten matemaattiset objektit toisiinsa suhtautuvat. Esimerkiksi luonnollisten lukujen teorian ymmärtämisen kannalta ei ole tärkeää saavuttaa ymmärtämystä luonnollisten lukujen olemuksesta,

siis siitä *mitä* objektit $1, 2, 3, \dots$ ovat, vaan siitä, mitkä ovat niiden väliset operaatiot ja suhteet. Tietysti perusolioista määritelmien kautta rakennettavien olioiden luonteella on merkitystä, mutta vain määritelmän ymmärtämisen kannalta. Esimerkiksi *matriisi* (käsitellään osassa Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra) määritellään tietyn tyyppisenä reaali-lukukaaviona, ja tällöin tulee ymmärtää mitä reaali-lukujen sijoittuminen kaavioon merkitsee matriisioperaatioiden kannalta. Tämä voidaan ilmaista myös siten, että matemaattisen käsitteen *matriisi* ontologia rakennetaan jo olemassaolevan matemaattisten käsitteiden päälle.

Kaikki matemaattiset teoriat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa, jossa teorian perusolioiden ja -suhteiden olemassaolo esitetään määritelminä tai *aksioomina* eli perusväittämänä. Muut teorian väittämät eli *lauseet* eli *teoreemat* johdetaan loogisesti eli *dedusoidaan* aksioomista tai jo aiemmin dedusoiduista väittämistä. Matemaattinen *teoria* tarkoittaa niiden lauseiden joukkoa, jotka voidaan aksioomista johtaa.

Esimerkki 2. Luonnollisten lukujen teoriassa voidaan peruskäsitteiksi valita luvut $1, 2, 3, \dots$ ja niiden yhteenlasku $+$. Yhdeksi teorian aksioomaksi voidaan valita liitännäislaki (1.1). Yleensä näin ei kuitenkaan tehdä, vaan luonnollisten lukujen teoria perustetaan vielä alkeellisempiin käsitteisiin. Nämä esitetään esimerkissä 3.

Matemaattisen teorian kannalta on tärkeää, että teorian peruskäsitteet ja aksioomat olisivat mahdollisimman yksinkertaiset, sillä abstraktista olemuksesta huolimatta matemaattisen teorian toivotaan yleensä kuvaavan mahdollisimman hyvin jotain fyysiseen maailmaan liittyvää asiaa. Jos teorian peruskäsitteet ja aksioomat ovat mahdollisimman harvalukuiset ja yksinkertaiset, on helpompaa varmistua siitä, että ne kuvaavat tarkasti toivottuja fyysikaalisen maailman olioita.

Toinen syy aksioomajärjestelmien yksinkertaisuuspyrkimykseen on seuraava: osoittautuu, että jos teorian aksioomat ovat *ristiriitaiset*, voidaan niistä loogisesti johtaa mitä hyvänsä. Erityisesti voidaan johtaa mikä hyvänsä väitelause ja sen kielto. Teoriaa ei siis voida pitää hyväksyttävänä (tai edes mielenkiintoisena), jos sen aksioomat ovat keskenään ristiriitaiset.

Tämän vuoksi teorian aksioomien yksinkertaisuus on erittäin suotavaa: on uskottavaa, että ristiriitaisuudet näkyvät helpommin, mikäli aksioomat ovat yksinkertaisia. Ikävä kyllä tämä pitää paikkansa vain äärimmäisen yksinkertaisissa matemaattisissa teorioissa. Yleensä ristiriidattomuus on erittäin hankalasti (jos lainkaan) todennettavissa: 1900-luvun alkupuolella matematiikan ja logiikan perusteiden tutkimus on osoittanut, että lähes kaikkien mielenkiintoisten matemaattisten teorioiden aksioomajoukkojen ristiriidattomuutta ei voida teoriassa itsessään lainkaan todentaa. Ns. Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen mukaan teorian ristiriidattomuutta ei teorian puitteissa voida todentaa, jos teoria on kyllin rikas puhuakseen luonnollisista luvuista.

Esimerkki 3 (Giuseppe Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille). Luonnollisten lukujen teorian *peruskäsitteet* ovat joukko $\mathbb{N}$, luonnollinen luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luonnollisen luvun n seuraaja $s(n)$. Teorian aksioomat ovat seuraavat:

1. Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
2. Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkösen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
3. Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksiooma*).

Näistä peruskäsitteistä ja aksioomista lähtien johdetaan kaikki luonnollisten lukujen ominaisuudet. Esimerkiksi yhteenlaskun määrittely voidaan aloittaa määrittelemällä $1 + n = n + 1 = s(n)$ ja laajentaa tästä koskemaan kaikkia summia $n + m$. Samoin käsitteet *suurempi kuin* ja *pienempi kuin* voidaan määritellä käyttäen pelkästään mainittuja peruskäsitteitä.

Vaikka Peanon aksioomat ovat yksinkertaiset, ei niiden ristiriidattomuutta voida todentaa perinteisen matematiikan puitteissa. Ristiriidattomuus voidaan todistaa pidemmälle viedyn matematiikan avulla, mikäli tiettyjen äärettömien objektien ominaisuuksista oletetaan riittäviä säännönmukaisuuksia.

Luonnollisten lukujen teoriaa voidaan laajentaa kokonaislukujen teoriaksi uusia käsitteitä määrittelemällä. Samoin voidaan kokonaisluvuista päästä rationaalilukuihin ja edelleen reaalilukuihin. Toisaalta määritelmät voivat olla varsin monimutkaisia, ja siksi yleensä on perusteltua aksiomatisoida reaaliluvut erikseen.

Koska edellä puhuttiin siitä, että matematiikan teorian väittämät johdetaan aksioomista loogisesti päätelemällä *deduktiolla*, lienee syytä mainita jokunen sana tästäkin. Loogisen päättelyn eri muotoja on esitelty tämän monisteen liitteessä, mutta matematiikassa käytetään yksinomaan deduktiivista päättelyä, joka voidaan luonnehtia siten, että aina premissien (oletukset) ollessa yhtäaikaan tosia, on myös johtopäätös aina tosi. Tämä eroaa ns. induktiivisesta ja abduktiivisesta päättelystä, jotka eivät välttämättä ole totuusarvon säilyttäviä.

Luvun oleellisia asioita:

- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Matematiikan perustana toimivat aksioomat, lauseita eli teorian väittämiä johdetaan päätelemällä.
- Deduktio on ainoa matematiikassa käytettävä päättelyn muoto.

Luku 2

Matematiikan ja logiikan merkintöjä

2.1 Kreikkalaiset aakkoset

Matematiikan lisäksi useilla luonnontieteen aloilla käytetään kreikkalaisia aakkosia, jotka on siis syytä opetella. Joistakin pienistä kirjaimista käytetään kahta eri muotoa.

alfa	$A \alpha$	iota	$I \iota$	rho	$P \rho$
beta	$B \beta$	kappa	$K \kappa, \varkappa$	sigma	$\Sigma \sigma, \varsigma$
gamma	$\Gamma \gamma$	lambda	$\Lambda \lambda$	tau	$T \tau$
delta	$\Delta \delta$	myy	$M \mu$	ypsilon	$\Upsilon \upsilon$
epsilon	$E \varepsilon$	nyy	$N \nu$	fii	$\Phi \phi, \varphi$
zeeta	$Z \zeta$	ksii	$\Xi \xi$	khii	$X \chi$
eeta	$H \eta$	omikron	$O o$	psii	$\Psi \psi$
theeta	$\Theta \theta, \vartheta$	pii	$\Pi \pi, \varpi$	oomega	$\Omega \omega$

2.2 Termit ja kaavat

Luonnollisia kieliä kuten suomi ja englanti tarkastellaan ainakin lauseopin (syntaksi) ja merkitysoopin (semantiikka) kannalta. Sanoja jaotellaan tyypillisesti eri luokkiin, kuten verbit, substantiivit, jne. Tämä jaottelu edellyttää sanan merkityksen tuntemisen, mutta ei silti ole aina yksikäsitteinen, vaan myös asiayhteys pitää toisinaan tuntea. Esimerkiksi suomen kielen sana ”kuusi” voi olla asiayhteydestä riippuen joko substantiivi tai numeraali.

Matemaattiset kaavat voidaan ymmärtää formaalina kielenä, jonka jäsentely on suoraviivaisempaa kuin luonnollisten kielten. Tärkeimmät syntaksiin liittyvät käsitteet ovat *termit* ja *kaavat*, joiden merkitystä selostetaan tässä luvussa.

2.2.1 Termit

Yksinkertaisimpia termejä ovat *vakiosymbolit* ja *muuttujasymbolit*, joilla ei katsota olevan sisäistä merkitysoopin rakennetta. Vakiosymboleista esimerkkeinä voidaan esittää 0, 1, 4, 72, 127, 922 ja muuttujasymboleista vastaavasti vaikkapa x , y , z , x_1 , a_4 ja q_5 .

Vakio- ja muuttujasymbolien lisäksi käytetään *funktiosymboleja*, joita käyttämällä voidaan muodostaa monimutkaisempia termejä. Esimerkkeinä funktiosymboleista voidaan mainita $+$, $\cdot$, $\sin$, $()^2$ jne. Funktiosymbolit voivat olla 0- 1-, 2-, tai useampipaikkaisia. Esimerkiksi $+$ käsitetään yleensä kaksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, johon liitetään kaksi vakiosymbolia. Täten $2+4$ on termi, jossa $+$ on kaksipaikkainen funktiosymboli, johon on liitetty vakiosymbolit 2 ja 4. Samoin potenssiin korottaminen 2^3 voidaan käsittää kaksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, johon on liitetty vakiosymbolit 2 ja 3. Monissa matematiikkaohjelmissa, Matlab mukaanlukien, potenssiin korotus esitetään muodossa 2^3 . Trigonometrinen merkintä $\sin x$ voidaan ymmärtää yksipaikkaiseksi funktiosymboliksi.

Integraalimerkintä

$$\int_2^5 tx^3 dx \quad (2.1)$$

voidaan käsittää nelipaikkaiseksi funktiosymboliksi. Matlab-ohjelmistossa yllämainittu integraali syötetään muodossa

$$\text{int}(t*x^3, x, 2, 5) \quad (2.2)$$

Merkintä (2.2) korostaa funktiosymbolin nelipaikkaisuutta: sulkeiden sisällä on neljä ”paikkaa” joita pilkut erottavat. Ensimmäinen paikka on varattu integrandille tx^3 , toinen integrointimuuttujalle x , kolmas integraalin alarajalle 2 ja neljäs integraalin ylärajalle 5.

Mikä hyvänsä vakiosymboli voidaan katsoa nollapaikkaiseksi funktiosymboliksi, eikä mitään loogista syytä erottaa näitä toisistaan olekaan. Esimerkiksi vakiosymbolit 2 tai 9 ovat riippumattomia mistään muuttujista, siis nollapaikkaisia funktiosymboleja. Sen sijaan on täysin makuasia, katsotaanko esimerkiksi merkintä -2 yhdeksi vakiosymboliksi vai ko vakiosymbolin 2 ja yksipaikkaisen funktiosymbolin $-$ yhdisteeksi.

Tiukan muodollisessa logiikan esityksessä ei käytetä tavanomaisia matematiikan merkintöjä $+$, a^b tai $\sin x$, vaan funktiosymboleista käytetään kirjainmerkintöjä, ja ns. infix-merkintä $x + y$ korvataan merkinnällä $+(x, y)$. Haluttaessa voidaan myös $+$ korvata jollain muulla symbolilla, esimerkiksi s ja täten yhteenlasku merkitä muotoon $s(x, y)$. Samoin potenssimerkintä voitaisiin ajatella merkitävän muodossa $p(x, y)$, jonka tulkinta olisi tavallinen potenssiin korotus x^y . Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuudessa ei ole kuitenkaan tarpeen käyttää logiikan muodollisia esityksiä, vaan funktiosymboleja kuvaamaan käytetään vakiintuneita perinteisiä merkintöjä.

Määritelmä 1 (Termit).

1. Vakio- ja muuttujasymbolit ovat termejä.
2. Jos f on n -paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä, on myös

$$f(t_1, \dots, t_n) \quad (2.3)$$

termi.

3. Mitään muita termejä ei ole.

Termien määritelmä on siis luonteeltaan *rekursiivinen*: Ensin esitetään rekursion *pohja*, jonka tässä tapauksessa muodostavat vakio- ja muuttujasymbolit. Kaikkien termien joukko määrittyy siten, että jo olemassa olevista termeistä voidaan rakentaa uusia termejä funktiosymbolien avulla. Rekursiivisesti määriteltäviä rakenteita tarkastellaan lähemmin kurssikokonaisuuden osassa Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka.

On huomioitava että monien funktiosymbolien käyttö on historiallisesti vakiintunut aivan toisenlaiseksi kuin muotoon (2.3). Tästä esimerkkinä ovat yllä summamerkintä (ei merkitä $s(x, y)$ vaan $x + y$), potenssimerkintä (ei merkitä $p(x, y)$ vaan x^y) ja integraalimerkintä (ei merkitä muodossa (2.2) vaan muodossa (2.1)). Lukuunottamatta historian saatossa hyvin vakiintuneita matematiikan merkintöjä monissa matematiikkaohjelmistoissa käytetään kuitenkin melko yleisesti tyyppiä (2.3) olevaa merkintää.

Huomautus 1. Yhteenlasku käsitetään yleensä kaksipaikkaisena funktiosymbolina, mutta tästä huolimatta ainakin reaalityyppisille merkintä $a + b + c$ on täysin mielekäs. Tämä voidaan nimittäin käsittää joko muodossa $(a + b) + c$ tai muodossa $a + (b + c)$, joissa kummassakin esiintyy vain kaksipaikkainen yhteenlasku. Kumpikin muodot tarkoittavat samaa asiaa, koska reaalityyppisille pätee liitännälaki (1.1).

Tämän yleistyksenä voidaan määritellä useampipaikkainen yhteenlasku $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ olipa n mikä hyvänsä.

2.2.2 Atomikaavat

Atomikaavat ovat kaikkein yksinkertaisimpia kaavoja, ja ne koostetaan termeistä joko *yhtäsuuruutta* tai *relaatiotymbolia* käyttämällä. Aivan kuten funktiosymbolit, voivat myös relaatiotymbolit R olla 0-, 1-, 2-, tai useampipaikkaisia. Formaalin logiikan merkinnöillä n -paikkaisesta relaatiotymbolista

R käytetään tyypillisesti merkintää $R(t_1, \dots, t_n)$, missä $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä. Samoin kuin funktiosymbolien kohdalla, on huomattava että matematiikassa käytetään lukuisia vakiintuneita relaatio-symboleja, joiden merkintätapa poikkeaa tiukan muodollisesta logiikan merkintätavasta. Logiikan oppikirjoissa relaatio-symboleista käytetään myös nimitystä *predikaattisymboli*.

Relaatioiden käsitettä ja olemusta käsitellään tarkemmin kurssilla Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka. Tässä luvussa relaatioita ja relaatio-symboleja käsitellään lähinnä vain esimerkkien kautta.

Luultavasti kaikkein tunnetuin relaatio-symboli on $<$ (tulkinta: pienempi kuin), joka voidaan käsitellä kaksipaikkaiseksi relaatio-symboliksi. Tällöin $4 < 2$ on kaava, jossa kaksipaikkaiseen relaatio-symboliin $<$ on liitetty vakiosymbolit 4 ja 2. Samoin kuin funktiosymbolien tapauksessa, merkintää $4 < 2$ kutsutaan infix-merkinnäksi ja logiikan kannalta muodollisempi merkintä olisi $<(4, 2)$. Oli si toki myös mahdollista korvata $<$ kokonaan toisella, vaikkapa kirjainmerkinnällä L . Tällöin siis merkitä $x < y$ korvattaisiin kokonaan merkinnällä $L(x, y)$.

Esimerkkeinä muista relaatio-symboleista voidaan mainita $\leq$ (pienempi tai yhtäsuuri kuin), $>$ (suurempi kuin) ja $\geq$ (suurempi tai yhtäsuuri kuin). Nämä kaikki esittävät kaksipaikkaisia relaatio-symboleja.

Esimerkki 4. Kolmiulotteisen avaruuden piste voidaan esittää kolmella koordinaatilla muodossa (x, y, z) . Tason yhtälö kolmiulotteisessa avaruudessa puolestaan on (käsitellään tarkemmin kurssilla Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra) muotoa $ax + by + cz = d$, missä a, b, c ja d ovat vakioita. On mahdollista määrittellä kolmepaikkainen relaatio-symboli $T(x, y, z)$, joka tulkitaan todeksi, mikäli $ax + by + cz = d$ ja epätodeksi mikäli $ax + by + cz \neq d$. Relaatio-symboli T siis ilmaisee onko kolmen reaalityön määrittämä piste (x, y, z) tasolla vai ei.

Ylläolevan esimerkkiä laajentamalla (miten?) on mahdollista määrittellä myös useampipaikkaisia relaatio-symboleja.

Määritelmä 2 (Atomikaavat). Atomikaava on muotoa $t_1 = t_2$ tai $R(t_1, \dots, t_n)$, missä R on n -paikkainen relaatio-symboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä. Ensimmäistä atomikaavaa kutsutaan myös *yhtälöksi*.

Esimerkki 5. x on muuttujasymboli ja 0, 3 ja 5 ovat vakiosymboleja. Neliöön korotus voidaan katsoa yksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, kertolasku ja yhteenlasku kaksipaikkaisiksi. Täten $3x$, x^2 ovat termejä ja nämä voidaan yhdistää monimutkaisemmaksi termiksi $x^2 + 3x$. Tästä ja vakiosymbolista 5 voidaan edelleen rakentaa termi $x^2 + 3x + 5$ (katso huomautus (1)).

Nyt esimerkiksi $x^2 + 3x + 5 = 0$ ja $x^2 + 3x + 5 > 0$ ovat atomikaavoja. Näistä ensimmäinen on yhtälö.

Huomautus 2. Jatkossa puhutaan myös atomikaavojen yleistyksistä, mutta jo tässä vaiheessa on syytä huomauttaa merkittävästä erosta termien ja kaavojen välillä: Termit tulkitaan jokin joukon alkioiksi, kun taas kaavojen tulkintana on aina totuusarvo ”tosi” tai ”epätosi”.

Esimerkki 6. $x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ on termi. Se voi saada arvokseen esimerkiksi reaalityön, kompleksiluvun tai matriisin. $x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 7x + 3$ puolestaan on (atomi)kaava, tarkemmin sanottuna yhtälö, joka voi olla tosi tai epätosi.

Huomautus 3. Tarkkaavainen lukija saattaa huomata että yhtäsuuruusmerkin avulla muodostettu atomikaava $t_1 = t_2$ muistuttaa hyvin paljon kaksipaikkaisen relaatio-symbolin avulla muodostettua kaavaa. Periaatteessa voitaisiin luopua yhtäsuuruusmerkistä ja merkinnän $t_1 = t_2$ sijaan käyttää vaikkapa merkintää $E(t_1, t_2)$, joka tulkittaisiin todeksi, mikäli t_1 ja t_2 tulkitaan yhtäsuuriksi, ja epätodeksi muutoin.

Itse asiassa joissakin logiikan oppikirjoissa menetelläänkin juuri tällä tavoin, siis käsittelemällä yhtäsuuruus vain tavalliseksi kaksipaikkaiseksi relaatio-symboliksi. Tässä lähestymistavassa saattaa kuitenkin piillä ongelma, mikäli yhtäsuuruutta määrittävä relaatio-symboli sallitaan *tulkittavan* vapaasti. Sekä funktio- että relaatio-symbolien tulkintaa käsitellään tuonnempana.

2.2.3 Yhdistetyt kaavat ja kvanttorit

Formaalin logiikan kielessä on myös mahdollista yhdistää atomikaavoja toisiinsa ja perustaa niille tulkinta. Atomikaavojen yhdistäminen monimutkaisemmiksi kaavoiksi tapahtuu loogisten *konnektiivien* kautta. Lisäksi voidaan käyttää *kvanttoireita*, joita käsitellään jäljempänä.

Yleisimmät *konnektiivit* ovat

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi)

Logiikan ja matematiikan merkinnöissä käytetään yleensä kahdentyyppisiä kvanttoireita, ns. *universaalikvanttoria* $\forall$ ja *eksistentiaalikvanttoria* $\exists$. Seuraava rekursiivinen määritelmä luonnehtii kaikki kaavat

Määritelmä 3 (Kaavat).

1. Kaikki atomikaavat ovat kaavoja.
2. Jos P ja Q ovat kaavoja, niin myös $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\neg P$, $P \rightarrow Q$ ja $P \leftrightarrow Q$ ovat kaavoja.
3. Jos x on muuttujasymboli ja P kaava, niin $(\forall x)P$ ja $(\exists x)P$ ovat kaavoja.
4. Muita kaavoja ei ole.

2.3 Semantiikka

Edellisissä luvuissa on kuvattu, miten kaavoja, joilla esitetään matemaattisia väittämiä, voidaan kirjoittaa syntaktisesti oikein. Semantiikka, joka koskee näiden kaavojen tulkintaan, on yleensä huomattavasti vaativampi, mutta myös oleellinen osa formaalisen kielen tarkastelua.

Voidaan esimerkiksi pohtia, onko $2 \cdot 3 = 6$ tulkittava todeksi. Tämä riippuu ensinnäkin siitä, miten vakiosymbolit 2, 3 ja 6 tulkitaan, mihin joukkoon ne katsotaan kuuluvan, ja miten kaksipaikkainen funktiosymboli $\cdot$ tulkitaan. Mikäli tulkintajoukko on kokonaisluvut, vakiosymbolit ja funktiosymboli tulkitaan tavanomaisella tavalla, niin silloin kaava tulkitaan todeksi. Jos taas symboli $\cdot$ tulkitaan vaikkapa kokonaislukujen yhteenlaskuksi, on kaava selvästikin tulkittava epätodeksi.

Seuraavassa luonnehditaan, miten kaavojen tulkinta tapahtuu.

Termit:

1. Ensin on kiinnitettävä tulkintajoukko A , ja tulkittava vakio- ja muuttujasymbolit tulkintajoukon alkioiksi. Tämä voi periaatteessa tapahtua mielivaltaisella tavalla, mutta tällä kurssikokonaisuuksella ei ilman hyvää syytä ryhdytä poikkeamaan esim vakiosymbolien 1, 2, 3, jne tavanomaisesta tulkinnasta.
2. Seuraavaksi on kiinnitettävä funktiosymbolit. Tämäkin on periaatteessa mielivaltaista, mutta jatkossa esim $\sin$, $\sqrt{\quad}$ jne. kiinnitetään totutulla tavalla. Funktiosymbolin arvoksi kiinnitetään se tulkintajoukon alkion, jonka funktio määrittää vakio- ja muuttujasymboleille.

Esimerkki 7. Koska 2 on vakiosymboli, x on muuttujasymboli, ja $+$ kaksipaikkainen funktiosymboli, on $x + 2$ termi. Valitaan tälle tulkintajoukoksi reaalityyppiset luvut, ja tulkinta, jossa 2 ja $+$ eivät poikkea tavanomaisesta. Jos vielä valitaan muuttujasymbolille tulkinnaksi luku 6, on termin tulkinta luku 9. Huomaa, että termit tulkitaan aina joksikin tulkintajoukon alkioiksi.

Atomikaavojen tulkinnassa täytyy tässä yhteydessä hieman joustaa tarkkuudessa, koska tällä kurssilla ei perehdytä käsitteeseen relaatio tarkemmin. Esimerkinomaisesti voidaan sanoa, että tavanomaisessa tulkinnassa relaatio $1 < 2$ on tosi, mutta $4 < 3$ epätosi. Oletetaan, että käytetään jotain tiettyä tulkintaa, josta jatkossa käytetään nimitystä I . Käytetään myös termin t saamasta tulkinnasta merkintää t^I .

Atomikaavat

1. Jokainen relaatiot symboli R tulkitaan joukon A relaatioksi R^I .

2. Atomikaava $t_1 = t_2$ tulkitaan todeksi tulkinnassa I , jos ja vain jos t_1 ja t_2 saavat saman arvon tulkinnassa I .
3. Atomikaava $R(t_1, \dots, t_n)$ tulkitaan todeksi tulkinnassa I , jos ja vain jos $R^I(t_1^I, \dots, t_n^I)$ on tosi.

Yhdistetyt kaaavat

Kun atomikaavoille on saatu kiinnitettyä tulkinnassa I totuusarvot, määritellään yhdistetyille kaavoille totuusarvot *ns. totuustaulukon* avulla, jossa 0 edustaa totuusarvoa ”epätosi” ja 1 arvoa ”tosi”

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Yllä olevassa taulukossa esimerkiksi neljäs sarake tulkitaan siten, että kaava $P \wedge Q$ on tosi vain ja ainoastaan silloin kun sekä P että Q ovat molemmat tosia.

Valaistaan taulukon intuitiivista lähtökohtaa: Jos P ja Q ovat kaavoja, merkitsee esimerkiksi $P \wedge Q$ yhdistettyä kaavaa ” P ja Q ”, joka tulkitaan todeksi vain, jos molemmat P ja Q tulkitaan todeksi. Disjunktio $P \vee Q$ puolestaan tulkitaan todeksi jos jompi kumpi, P tai Q saa toden tulkinnan. Merkintä $\neg P$ tarkoittaa P :lle vastakkaista kaavaa, joka on tosi tarkalleen silloin kun P on epätosi. Kaava $P \rightarrow Q$ voidaan lukea ”jos P niin Q ”.

Kvanttorit

Olkoon $P(x)$ kaava, jossa esiintyy muuttujasymboli x . Tällöin kvanttorien tulkinta tulkinnassa I määräytyvät seuraavan periaatteen mukaan:

Määritelmä 4 (Kvanttorien tulkinta).

1. Kaava $(\forall x)P(x)$ tulkitaan todeksi tulkinnassa I , jos kaava $P(x)$ tulkitaan todeksi kaikilla valinnoilla $x \in A$ tulkinnassa I ,
2. Kaava $(\exists x)P(x)$ tulkitaan todeksi tulkinnassa I , jos on olemassa sellainen $x \in A$, että kaava $P(x)$ tulkitaan todeksi tulkinnassa I .

Näiden intuitiivinen merkitys on se, että universaalikvanttori väittää jotain olevan totta *kaikille* alkioille ja eksistentiaalikvanttori väittää että on olemassa alkio jolle jokin väite on tosi. Sanallisesti edellinen määritelmä Kvanttorit tulkitaan siten, että $(\forall x)P(x)$ tarkoittaa ”kaikille x :ille pätee $P(x)$ ” ja $(\exists x)P(x)$ ”on olemassa x jolle pätee $P(x)$ ”.

Esimerkki 8. Kaava $(\forall x)(x \geq 0)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan kaikille x :n arvoille on voimassa $x \geq 0$

Esimerkki 9. Kaava $(\exists x)(x^2 = 2)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan on olemassa sellainen alkio x , että $x^2 = 2$.

Esimerkki 10. Kaava $(\exists y)(\forall x)(y \leq x)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan on olemassa sellainen y , että kaikki muita arvoja kohtaan $y \leq x$.

Kaikkien edellämäinittujen kaavojen totuusarvo riippuu siitä, miten tulkinta valitaan. Mieti, onko olemassa sopivia tulkintajoukkoja, joilla edellisten esimerkkien kaavat tulevat tosiiksi / epätosiiksi, jos kaavoissa esiintyvät symbolit tulkitaan vakiintuneella tavalla.

2.4 Päätelyn epämuodollisempi esitys

Edes vähänkin monimutkaisemmissa tilanteissa on hankalaa koota yhteen kaikkia taustaoletuksia, jotka periaatteessa pitäisi olla loogisen päätelyn taustalla. Esimerkiksi kaava $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ on tosi vain, jos voidaan olettaa ensin distributiivilaki $a(b+c) = ab+ac$, kommutatiivilaki $ab = ba$, sekä lyhennysmerkintä $ab + ab = 2ab$.

Siksi päätelyä ei esitetä yleensä tiukan formaalissa muodossa kaavojen tasolla, vaan käytetään merkintää $\Rightarrow$ osoittamaan loogista seurausta lähes kuten kuten konnektiivia $\rightarrow$. Tällä kurssilla merkintä $\rightarrow$ on varattu muodollisten loogisten väittämien yhdistämiseen, kun taas merkintää $\Rightarrow$ käytetään osana matemaattisesti varustettua suomen kieltä, ja merkintä saattaa sisältää kirjoittamattomia

taustaoletuksia, kuten esimerkiksi se, että kaavoissa esiintyvillä symboleilla on tavanomaiset tulkinat, ja esimerkiksi että kaavan tarkoitettu tulkintajoukko on reaaliluvut

Esimerkki 11. Esimerkiksi

$$a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b$$

katsotaan suomen kielen lauseeksi, jossa kerrotaan että yhtälöstä $a + 1 = b + 1$ seuraa loogisesti yhtälö $a = b$. Tämä väittämä on tosi, jos puhutaan reaaliluvuista, ja symbolien $+$ ja 1 tulkinta on tavanomainen. Sen sijaan $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$ on logiikan kaava, johon ei välttämättä katsota sisältyvän luonnollisen kielen elementtejä. Siinä esiintyvät symbolit voidaan myös tulkita millä hyvänsä tavalla, joten kaavan totuusarvoon ei voida ottaa kantaa.

Esimerkki 12. Aiemmassa luvussa on esitetty kaavoja, jossa on peräkkäisiä yhtäsuuruusmerkkejä kirjoitettuna muotoon $A = B = C = D$. Tämänlainen kaava ei kuitenkaan ole muodollisesti oikein. Sen sijaan kaava $(A = B) \wedge (B = C) \wedge (C = D)$ on muodollisesti oikein ja tämän looginen tulkinta on sama kuin aiemmin mainitun, syntaksin puolesta virheellisesti kirjoitetun kaavan $A = B = C = D$ tulkinta. Epämuodollisessa esityksessä sallitaan tietysti myös jälkimmäinen muoto.

Päättelyn epämuodollisemmassa esityksessä ei luetella kaikkia taustaoletuksia (kuten luonnollisten lukujen aksioomat, reaalilukujen aksioomat tms.), vaan kahden kaavan väliin asetetaan implikaatiomerkki $\Rightarrow$ mikäli (taustaoletusten vallitessa) jälkimmäinen kaava on tosi aina kun ensimmäinenkin on. Ekvivalenssimerkki $\Leftrightarrow$ asetetaan kaavojen väliin kun kaavat ovat yhtä aikaa tosia (taustaoletusten vallitessa).

On huomattava, että seuraava merkintätapa on puutteellinen, sillä kaavojen välissä ei ole mitään välimerkkejä:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Myös seuraava merkintätapa on virheellinen, koska kaavojen väliin ei pidä asettaa yhtäsuuruusmerkkiä:

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 1 = 0 \\ = &(x - 1)^2 = 0 \\ = &x - 1 = 0 \\ = &x = 1 \end{aligned}$$

Oikea merkintätapa on

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &x = 1. \end{aligned}$$

Implikaatiomerkkiä voidaan käyttää esimerkiksi seuraavassa tilanteessa:

$$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25.$$

Implikaatiomerkin molemmilla puolilla on atomikaava, joten merkintä on syntaksin mielessä oikeanlainen. Tavanomaisen tulkinnan puitteissa merkintä on myös semanttisesti tosi, sillä se väittää, että ehdosta $x = 5$ seuraa $x^2 = 25$.

Merkintä

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

on myös syntaktisesti oikein. Kumpikin implikaatiomerkin puoli on kaava (tarkemmin sanottuna yhtälö), jotka voidaan periaatteessa yhdistää implikaatiomerkillä $\Rightarrow$. Sen sijaan yllä oleva implikaatio

on lukiokurssilla opitun tulkinnan kannalta epätosi, sillä ehdosta $x^2 = 25$ ei välttämättä seuraa $x = 5$ (miksi?).

Kahden termin väliin ei aseteta implikaatiomerkkiä, joten seuraava merkintätapa on virheellinen:

$$\int_0^3 x^2 dx \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 \Rightarrow \frac{1}{3} 3^3 \Rightarrow 9.$$

Termien väliin voidaan asettaa yhtäsuuruusmerkki (merkkejä), jolloin saadaan kaava (kaavoja). Oikea merkintätapa on seuraavanlainen:

$$\int_0^3 x^2 dx = \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} 3^3 = 9.$$

Huomautus 4. Suomen kielessä merkintä $\Leftrightarrow$ luetaan yleensä 'jos ja vain jos', ja merkintä $\Rightarrow$ 'jos ..., niin ...'.

Esimerkki 13. Merkintä $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ voidaan lukea "3x on 6 jos ja vain jos x on 2. Merkintä $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$ voidaan lukea "jos x = 5, niin $x^2 = 25$ ". Viimeisin kaava on myös loogisesti tosi tavanomaisen tulkinnan mukaan.

2.5 Joukko-opin peruskäsitteet

Käsite *joukko* on yksi matematiikan tärkeimmistä. Matemaattisia teorioita esitettäessä predikaattilogiikan avulla tulee aina valita tarvittavat predikaatti- ja funktiosymbolit, joilla teorian objekteista voidaan puhua. Osoittautuu, että lähestulkoon kaikki matematiikka voidaan rakentaa joukko-opin varaan, jolloin siis periaatteessa riittää esittää joukko-oppi aksiomatisoituna teoriana ja sopia, että muut matemaattiset käsitteet ovat lyhennysmerkintöjä joukko-opin merkinnöistä.

Äärellisen tai numeroituvan äärettömän joukon merkitsemiseen käytetään aaltosulkeita: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Joukkoon kuulumisesta käytetään merkintää $\in$ ja päinvastaisesta merkintää $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$. Tyhjistä joukosta, johon ei kuulu yhtään alkioita, käytetään merkintää $\emptyset$. Tätä merkintää ei tule sekoittaa kreikkalaisen aakkoston ϕ -kirjaimeen. Tavallisimmat joukkojen väliset operaatiot ovat

- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$
- Differenssi eli erotus. Esimerkiksi $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Tämän kurssin tavoitteiden kannalta ei ole mielekästä esittää aksiomaattista perustaa joukko-opille, joten tyydytään sen sijaan intuitiiviseen käsitykseen.

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Joukon merkinnässä alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Täten siis $\{2, 3, 1\}$ on sama joukko kuin $\{1, 2, 3\}$. Joukko ei myöskään sisällä samaa alkioita kahteen kertaan, joten on sovittu, että esimerkiksi myös merkintä $\{1, 1, 2, 3\}$ tarkoittaa joukkoa $\{1, 2, 3\}$.

Joskus myös ääretön joukko määritellään "esittele-mällä" sen alkiot. Näin voidaan tehdä, mikäli on olemassa jokin *induktiivinen sääntö*, joka määrittää kaikki alkiot.

Esimerkki 14. Luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Käsitteen joukko kuvailussa on oleellista, että voidaan aina määrittää kuuluuko jokin alkio joukkoon vai ei. Tähän liittyvät matemaattiset merkinnät esitellään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 5. $\in$ on ns. kaksipaikkainen relaationsymboli. Merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A . Merkintä $x \notin A$ on lyhennys merkinnästä $\neg(x \in A)$ ja siis tarkoittaa, että alkio x ei kuulu joukkoon A .

Määritelmä 6. Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkio x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$.

Esimerkki 15. $B = \{x \in A \mid x \leq 2\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää joukkoon A kuuluvat alkio x , jotka ovat suuruudeltaan korkeintaan 2. Jos esimerkiksi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ on $B = \{1, 2\}$.

Joukko-opin tärkein anti matematiikalle on mahdollisuus laskea käsitteet yksinkertaiselle pohjal- le. Yleensä matemaattisen teorian esittämisessä käytetään funktio- ja relaationsymboleja, mutta periaatteessa lähes kaikki matematiikka on mahdollista rakentaa käyttämällä vain yhtä relaatiota ($\in$) ja sopimalla pidemmälle menevät määritelmät lyhennysmerkinnöiksi.

Edellä kuvailtua joukko-oppia kutsutaan *naïiviksi joukko-oppiksi*, sillä joukkoja ei määritellä eksaktilla tavalla ja sisältymisrelaatio $\in$ käsitetään intuitiivisesti. 1800-luvun loppupuolella havaittiin, että naïivi joukko-oppi voi johtaa loogisiin ongelmiin, erityisesti mikäli joukkoon kuulumisen ehto merkinnässä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ on rajoittamaton.

Tämän vuoksi saksalainen matemaatikko Gottlob Frege (1848–1925) joutui kohtaamaan henkilökohtaiseksi tragediaksi luonnehdittavan vastoinkäymisen laatiessaan järkälemäistä teostaan *Grundgesetze der Arithmetik* (Aritmetiikan perusteet), osa 1 (1893), osa 2 (1903). Frege pyrki teoksessaan osoittamaan, että kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin, mutta oli sallinut joukkoon kuulumisehdon ilman rajoituksia. Tuolloin nuori brittiläinen matemaatikko ja loogikko Bertrand Russell (1872–1970) huomautti Fregelle, että hänen käsitteistönsä sisältää ristiriidan: Kun määritellään joukko

$$A = \{X \mid X \notin X\},$$

siis A on niiden joukkojen joukko, jotka *eivät kuulu itseensä*, voidaan tehdä seuraava johtopäätös: $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$. Tämä ristiriita tunnetaan nimellä *Russelin paradoksi* ja siitä on esitetty sittemmin lukuisia varianteja. Frege ehti lisätä painossa olevaan osaan 2 lisäsvut, jossa hän käsitteli Russelin havaintoa tragediana joka romahdutti hänen elämäntyönsä ennen kuin se ehdittiin edes kokonaisuudessaan julkaista.

Melko pian Russelin paradoksin jälkeen myös joukko-opille laadittiin aksiomaattinen lähestymistapa, joka nykyisin tunnetaan nimellä Zermelon –Fraenkelin -joukko-oppi. Tästä aksiomatisoidusta versiosta ei toistaiseksi ole löydetty ristiriitoja.

Esimerkki 16. Huomioi että tyhjä joukko $\emptyset$ on eri asia, kuin joukko $\{\emptyset\}$, jonka ainoa *alkio* on tyhjä joukko. Edelleen eri käsite on joukko $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, joka sisältää kaksi edellistä joukkoa. Näistä esitetyistä joukoista voidaan rakentaa yhä uusia muodostamalla joukko, jonka jäseninä ovat kaikki entiset joukot. Listan seuraava jäsen on täten $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ja yleinen sääntö on seuraava: $N_0 = \emptyset$, $N_i = N_{i-1} \cup \{N_{i-1}\}$.

Jos joukko-opille on luotu kestävä perusta, on sen nojalla yllämainittujen joukkojen olemassaolo ja uusien muodostaminen edellämäinitulla tavalla ongelmaton. Tällöin voidaan sopia, että joukosta $\emptyset$ käytetään merkintää 0, joukosta $\{\emptyset\}$ merkintää 1, joukosta $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ merkintää 2 jne. Tällä tavoin on mahdollista esittää luonnolliset luvut pelkästään joukko-opin käsitteiden avulla.

Lähes kaikki matemaattiset kaavat, lauseet ja todistukset voidaan kirjoittaa ja niiden merkitys voidaan periaatteessa ymmärtää ainoastaan joukko-opin merkintöjä käyttäen. Monet oleelliset käsitteet kuten funktio *määritellään* joukkojen avulla ja kurssilla Insinöörimatematiikka 2 nähdään miten tämä tapahtuu.

Voidaan oikeutetusti kysyä miksi sitten joukot ja joukko-oppi eivät näytä olevan erityisen tärkeitä matematiikan opiskelussa eivätkä edes kovinkaan usein matemaatikkojen työskentelyssä. Vastaus on varsin yksinkertainen: pelkästään joukko-opin merkintöjä ja käsitteitä käyttäen kaavoista, todistuksista ja käsitteistä tulisi varsin pitkiä ja työläitä ymmärtää, minkä vuoksi tarvitaan selkeämpiä merkintöjä ja käsitteitä.

Samankaltainen ilmiö nähdään myös ohjelmoinnissa: nykyisin enää aniharva ohjelmoi konekielillä (assembly), koska korkeamman tason ohjelmointikielillä työ on selkeämpää ja usein tarkoituksemukaisempaa. Kuitenkin korkean tason ohjelmointikielten toiminta voidaan selittää konekielen avulla. Matematiikassa voidaan joukko-opin käsitteiden ajatella vastaavan konekieltä ja tavallisesti esiintyvien käsitteiden vastaavan korkean tason ohjelmointikieltä. Joukko-opin peruskäsitteet kuitenkin esiintyvät matematiikan merkinnöissä useasti, minkä vuoksi niihin pitää perehtyä.

2.6 Vennin diagrammit

(Esitetään luennolla)

2.7 Tärkeimmät lukujoukot

Joukko on käsitteenä tarkoin määritelty, kun sen alkiot tunnetaan. Tällöin ei siis ole tarpeen perehtyä alkioiden sisäiseen rakenteeseen tai olemukseen, ei siis tarvitse tietää minkälaisia ”olioita” joukon alkiot ovat, riittää tietää sisältykö jokin alkio joukkoon vai ei.

Perinteisesti matematiikassa *lukujoukot* ovat olleet erityisasemassa jo historiallisista syistä. Tämän kurssin kannalta tärkeimmät lukujoukot luetellaan seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 7.

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Tällä kurssilla pidetään joukkoja $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ intuitiivisesti selvinä käsitteinä ja tarkastellaan pikemminkin lukujoukkoja $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa $\mathbb{C}$ käsitellään kurssin loppuosassa.

Määritelmien 6 ja 7 perusteella $\mathbb{Q}$ koostuu osamääristä $\frac{a}{b}$, joissa a ja b ovat kokonaislukuja, ja $b \neq 0$. Samaa osamäärää voidaan esittää monella tavalla: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$, mutta kuten aiemmin on mainittu, alkion useat mahdolliset esitykset eivät muuta joukkoa: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}\} = \{\frac{1}{2}\}$. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ voidaan katsoa kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ laajennukseksi, sillä jokainen kokonaisluku a voidaan esittää osamääränä $a = \frac{a}{1}$.

Jokaisella reaaliluvulla on olemassa desimaaliesitys, joka useimmissa tapauksissa on päättymätön. Sanotaan, että desimaaliesitys on päättävä, jos kaikki desimaalit ovat nollija jostakin rajasta lähtien, jolloin voidaan tietenkin jättää loputon nollien jono merkitsemättä.

Esimerkki 17. Rationaaliluvulla $\frac{1}{3}$ on päättymätön desimaaliesitys $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, sen sijaan rationaaliluvulla $\frac{1}{5}$ on päättävä esitys $\frac{1}{5} = 0,2000\dots$, mikä yleensä merkitään $\frac{1}{5} = 0,2$.

Päättävä desimaaliesitys (toisin sanoen sellainen desimaaliesitys, jossa kaikki desimaalit ovat nollija jostakin kohdasta lähtien) voi olla vain rationaaliluvuilla. Mikäli rationaaliluvun desimaaliesitys ei ole päättävä, se on jaksollinen. Toisaalta taas rationaaliluvun desimaaliesitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen: Esimerkiksi kokonaisluvulla 1 on sekä päättävä desimaaliesitys $1,000\dots$ että päättymätön jaksollinen desimaaliesitys $0,999\dots$. Itse asiassa jokaista päättävää desimaaliesitystä kohti voidaan löytää samaa lukua esittävä päättymätön esitys samoin kuin esimerkiksi luvulle $0,5000\dots = 0,4999\dots$.

Tavanomaisia merkintöjä ovat myös seuraavat:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)

2.8 Summa- ja tulomerkinnät

Summa- ja tulomerkinnät Σ ja Π ja niiden käsittelysäännöt saavat lukiokursseissa yleensä vain vähän huomiota. Näitä merkintöjä käytetään kuitenkin hyvin yleisesti ja siksi niihin on syytä perehtyä.

Summa voidaan merkitä lyhyemmin

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ja tulo

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Tässä luvussa käsitellään jatkossa ainoastaan summamerkin manipuloitua, koska vastaavat käsittelysäännöt voidaan saada helposti myös tulolle.

Summausindeksin i valinta ei ole tärkeä, yhtä hyvin yllä oleva summa voitaisiin kirjoittaa muodossa $\sum_{k=1}^n a_k$, tärkeää on ainoastaan, että summausindeksiä ei voi vahingossa sekoittaa johonkin toiseen lausekkeissa esiintyvään muuttujaan tai vakioon. Erityisesti kompleksilukujen yhteydessä (Insinöörimatematiikka 2) pitää karttaa i :n käyttöä indeksinä. Summamerkin ideana on, että summausindeksi juoksee läpi esiintyvien lukujen $a_1, \dots, a_n$ indeksoinnin luvusta 1 lukuun n , ja tämä ilmaistaan summamerkin Σ ala- ja yläpuolella olevilla rajoitteilla ” $i = 1$ ” ja ” n ”.

Summamerkintää käyttäen voidaan vaikkapa n :n ensimmäisen kokonaisluvun summa kirjoittaa lyhyempään muotoon:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i.$$

On kuitenkin huomattava, että kyseessä on vain merkintätapa, eikä se anna mitään keinoa näyttää toteen, että

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

mikä kyllä pitää paikkansa. Tällä kurssilla esitetään menetelmiä, joilla yllä oleva yhtälö voidaan todistaa oikeaksi.

Summamerkin käsittelyyn liittyvät säännöt saadaan suoraan yleisistä summia koskevista säännöistä sekä summamerkin määrittelystä. Esimerkiksi tavanomainen osittelulain soveltaminen

$$c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$$

voidaan summamerkintää käyttäen kirjoittaa muotoon

$$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i.$$

Samoin summattavien jäsentely

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

saa muodon

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i).$$

Edelleen, summamerkintä voidaan aina ”katkaista”: jos $1 < m < n$, voidaan tietysti kirjoittaa

$$a_1 + \dots + a_n = a_1 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

mikä voidaan edelleen lyhentää muotoon

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i.$$

Summausindeksin muutos on suora seuraus merkintätavasta:

$$\sum_{i=1}^n a_i, \quad \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}, \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

tarkoittavat samaa asiaa. Yleisenä sääntönä pätee, että summausmerkinnän ylä- ja alarajaa voidaan nostaa yhdellä, jos summalausekkeessa esiintyvistä indeksistä vähennetään yksi. Samoin summausmerkinnän rajoja voidaan laskea yhdellä, jos summalausekkeen indeksiin lisätään ykkönen. Tarvittaessa summamerkinnot rajan nostoa tai laskua voidaan tietenkin soveltaa useamman kerran peräkkäin.

Jos merkinnässä $\sum_{i=m}^n$ on $n < m$, sovitaan, että kyse on tyhjästä summasta, jonka arvo on nolla. Vastaavasti tyhjän tulon arvoksi sovitaan 1.

Luvun oleellisia asioita:

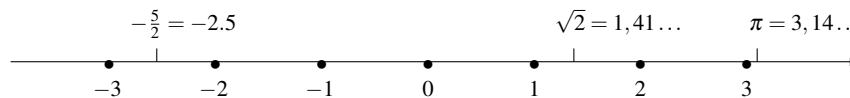
- Logiikan merkinnät: termit, kaavat, implikaatio
- Joukko-opin merkinnät
- Lukujoukot
- Summa- ja tulomerkinnot

Luku 3

Reaalilukujen perusominaisuudet

Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuuden kannalta keskeisimmät matematiikan osa-alueet ovat differentiaali- ja integraalilaskenta, ja niiden perustana toimii reaalilukujen teoria. Kuten kaikki matematiikka, myös reaalilukujen teoria on esitettävissä aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa. Tässä luvussa esitellään reaalilukujen aksiomaattikka lyhyesti lähinnä siitä syystä, että täten voidaan vastata joihinkin perustavaa laatua oleviin kysymyksiin, kuten “mikä on luvallinen operaatio?”, Miksi negatiivinen kertaa negatiivinen on positiivinen?” ja “miksi epäyhtälömerkin suunta pitää kääntää kun kerrotaan negatiivisella luvulla?”. Lisäksi löytynee vastauksia kysymyksiin, joita lukiokurssilla ei luultavasti ole edes esitetty. Tällä kurssikokonaisuudella ei kuitenkaan ole tarkoitus ryhtyä johtamaan reaalilukujen teoriaa aksiomista asti, sillä sellainen esitys veisi kohtuuttomasti aikaa ja muita resursseja. Differentiaali- ja integraalilaskennan rakennelman yksityiskohtainen johtaminen kuuluu matematiikan pääainekursseille.

Intuitio reaaliluvuista rakentuu sille pohjalle, että reaaliluvut $\mathbb{R}$ täydentävät rationaalilukujen joukkoa muodostamalla lukusuorasta yhtenäisen yksiulotteisen jatkumon (kuva 3.1). Kokonaisluvut muodostavat selvästi toisistaan eroteltavissa olevan, *diskreetin* joukon, mutta reaalilukujen ajatellaan täyttävän suoran aukottomasti siten että yhtä ideaalista geometrista pistettä vastaisi tasan tarkkaan yksi reaaliluku. Tästä juontaa yleinen tapa kutsua reaalilukuja *pisteiksi*.



Kuva 3.1 Lukujen ajatellaan sijoittuvan lukusuoralle suuruusjärjestyksessä vasemmalta oikealle. Kokonaisluvut muodostavat tasavälisen pisteistön, kun taas rationaaliluvut levittäytyvät lukusuoralle tiheänä joukkona. Aukoton lukusuorasta tulee kuitenkin vasta, kun reaaliluvut tuodaan mukaan.

3.1 Rationaalilukujen epätäydellisyys

Palautetaan mieleen rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Samaistamalla murto-luvut $\frac{a}{b}$ kokonaisluvun a kanssa voidaan katsoa, että $\mathbb{Q}$ sisältää kaikki kokonaisluvut, mutta näiden lisäksi myös paljon muita lukuja. Kokonaislukujen graafisessa esityksessä lukusuoraan asetetaan pisteet ykkösen välein, mutta rationaalilukujen esitys on mutkikkaampi, sillä rationaaliluvut täyttävät lukusuoran tiheästi. Tämä voidaan nähdä siitä, että kahden rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä on aina näiden keskiarvo

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

Tämän vuoksi ei ole olemassa esimerkiksi pienintä positiivista rationaalilukua, sillä rationaaliluvusta q päästään aina pienempään lukuun jakamalla $q = \frac{a}{b}$ kahtia: $0 < \frac{q}{2} < q$. Toisaalta taas olipa $q = \frac{a}{b}$ miten pieni positiivinen rationaaliluku hyvänsä, saadaan tästä kokonaisluvulla kertomalla miten suuri luku hyvänsä: $Nb \cdot q = Nb \cdot \frac{a}{b} = Na \geq N$.

Rationaalilukujen hyviin ominaisuuksiin kuuluu äärellinen esitys: jokainen rationaaliluku voidaan esittää nimittäjän ja osoittajan avulla, jotka kumpikin puolestaan voidaan esittää äärellisenä

numerojonona, vaikkapa kymmenjärjestelmässä. Rationaaliluvut ovat kuitenkin ominaisuuksiltaan rajoitettuja: ne eivät täytä lukusuoraa aukottomasti.

Esimerkki 18. (Pythagoras) Todistetaan, että yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan olisi sellainen supistetussa muodossa oleva rationaaliluku $\frac{m}{n}$, että $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Tästä seuraa että $m^2 = 2n^2$, ts. kokonaisluvun m neliö on parillinen. Tällöin myös m on parillinen, sillä parittomien lukujen neliöt ovat parittomia. Koska m on parillinen, voidaan kirjoittaa $m = 2m_1$ ($m_1 \in \mathbb{Z}$) ja sijoittamalla tämä yhtälöön $m^2 = 2n^2$ saadaan $4m_1^2 = 2n^2$, ts. $2m_1^2 = n^2$. Samoin kuin edellä, voidaan tästä päätellä, että n on parillinen, siis $n = 2n_1$. Tällöin siis m ja n ovat jaollisia luvulla 2, mikä on vastoin oletusta, jonka mukaan $\frac{m}{n}$ oli supistetussa muodossa. Tämän ristiriidan vuoksi vastaoletus todetaan vääräksi.

Lukuja jotka eivät ole rationaalisia, sanotaan *irrationaaliluvuiksi*, joten edellisen esimerkin sanoma voidaan pukea muotoon: $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Reaalilukujen joukossa yhtälöllä $x^2 = 2$ on jopa kaksi ratkaisua, ja positiivisesta ratkaisusta käytetään tavalliseen tapaan merkintää $\sqrt{2}$. Voidaan kuitenkin perustellusti kysyä, miksi tällainen reaaliluku $\sqrt{2}$ on olemassa tai miksi vaikkapa luvut $\sqrt[n]{a}$ ovat olemassa positiivisille kokonaisluvuille a . Jotta tähän kysymykseen olisi edes toivoa saada vastaus, tulee tietysti löytää vastaus paljon perustavampaa laatua olevaan kysymykseen: *mitä reaaliluvut ovat?*

Edellisessä luvussa todettiin, että ainakin Eukleideen päivistä asti matemaattiset teoriat on esitetty aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa, jossa peruskäsitteet ja niiden suhteet määritellään aksiomina. Peruskäsitteiden päälle voidaan rakentaa uusia käsitteitä ja suhteita määrittelemällä.

Periaatteessa reaalilukujen teoria olisi mahdollista perustaa joukko-oppiin, jonka päälle määriteltäisiin uusia operaatioita siten että saataisiin aikaan luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ teoria. Tätä olisi puolestaan mahdollista laajentaa uusia käsitteitä määrittelemällä kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ teoriaksi. Laajennus kokonaisluvuista $\mathbb{Z}$ rationaalilukuihin $\mathbb{Q}$ saattaa vaikuttaa loogisesti haastavalta, mutta matemaattisten rakenteiden kannalta kyseessä on kuitenkin hyvin samankaltainen tilanne kuin siirtymässä joukosta $\mathbb{N}$ joukkoon $\mathbb{Z}$: Siinä saadaan jokaiselle kokonaisluvulle vasta-alkio yhteenlaskun suhteen, ja laajennuksessa joukosta $\mathbb{Z}$ joukkoon $\mathbb{Q}$ saadaan jokaiselle nollasta poikkeavalle luvulle käänteisalkio kertolaskun suhteen.

Viimeisin askel, laajentaminen rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ onnistuu niinkään joukko-opillisilla konstruktioilla. Näistä tunnetuimpia ovat *Cauchyn jonot* ja *Dedekindin leikkaukset*. Kumpaa hyvänsä käyttäen voidaan rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ päälle rakentaa reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$, ja yksi historiallisesti huomionarvoinen seikka on se, että nk. yhteismitattomien suureiden teoria, joka sai alkunsa jo Eudoksos Knidoslaisen (410/408 eaa – 355/347 eaa) töistä, on hyvin samankaltainen kuin Dedekindin (1831–1916) konstruktio. Täten voidaan sanoa, että jo muinaiset kreikkalaiset tunsivat reaalilukujen teorian ainakin jossain määrin. Heidän käsitteensä olivat kuitenkin rajoittuneet positiivisiin lukuihin, eikä teoria tiettävästi tullut antiikin aikoina erityisen tunnetuksi. Platonin kerrotaan myöhemmällä iälläan harmitelleen sitä, että yhteismitattomien suureiden teoria on jäänyt liian suppean piiriin tietoisuuteen.

Edellämainittu konstruktio joukko-opista reaalilukuihin asti on kuitenkin varsin työläs toteuttaa ja vaatii paljon aikaa tarkistaa kaikkien yksityiskohtien johdonmukaisuus ja oikeellisuus. Siksi näin ei yleensä menetellä edes matematiikan pääainekursseilla, vaan useimmiten reaaliluvut määritellään peruskäsitteinä, joiden väliset suhteet aksiomatisoidaan niin kutsuttuina reaalilukujen aksiomina. Näin reaaliluvut luodaan ikään kuin "tyhjistä" antamalla peruskäsitteet ja niitä hallinnoivat aksiomat.

On kuitenkin huomattava, että mikäli noudatettaisiin aiemmin esitettyä konstruktioprosesia, jossa askel kerrallaan joukko-opista siirryttäisiin lopuksi reaalilukuihin, ei pikapuoliin esitettävillä reaalilukujen aksiomilla olisikaan mitään aksiooman statusta, vaan nämä olisivat loogisesti johdettavia väittämiä alemman tason peruskäsitteistä ja aksiomista. On osoittautunut, että kaikki esitetyt prosessit reaalilukujen konstruoimiseksi ovat johtaneet samaan järjestelmään, joka seuraavassa esitetään. Siksi reaalilukujen aksiomaattinen esittämien ei kuitenkaan ole "tyhjistä" luomista vaan pikemminkin vastaa sitä, että suuri osa käsitteen kehityshistoriasta jätetään yksinkertaisesti huomiotta ja lähdetään tasolta, joka on aiemmin saavutettu loogisesti ja joka nyt korotetaan aksiomaattiseen asemaan lähinnä juuri siksi, ettei tarvitsisi käydä läpi pitkää matemaattista kehityshistoriaa. Tästä joudutaan maksamaan se hinta, että peruskäsitteiden ja aksiomien määrä on suurempi kuin alemman tason käsitteisiin nojautuessa.

3.2 Reaalilukujen aksiomatiikka

Reaaliluvut määritellään joukkona $\mathbb{R}$, jossa on kaksi kaksipaikkaista operaatiota $+$ ja $\cdot$, sekä kaksi erityistä alkioita $0 \in \mathbb{R}$ ja $1 \in \mathbb{R}$ siten, että seuraavat aksioomaryhmit toteutuvat: A) Kunta-aksioomat, B) Järjestysaksioomat ja C) Täydellisyysaksiooma

A) Kunta-aksioomat

1. Kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
3. Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n vastaluku $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
4. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
5. kaikille reaaliluvuille a, b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Edellämainitut aksioomat kertovat, että reaaliluvut muodostavat matematiikassa *kunnaksi* kutsutun algebrallisen järjestelmän, jossa on kaksi laskutoimitusta ($+$ ja $\cdot$), ja neutraalialkio 0 toimituksen $+$ (yhteenlasku) suhteen, sekä neutraalialkio 1 toimituksen $\cdot$ (kertolasku) suhteen, tämän kertoo aksiooma 2. Aksiooma 1 on aiemmin mainittu osittelulaki sekä yhteen- että kertolaskun suhteen, ja aksiooma 3 mahdollistaa sekä vähennys- että jakolaskun määrittelyn. Aksiooma 4 on tuttu vaihdannaislaki ja 5 osittelulaki.

Kunta-aksioomat ovat reaalilukujen algebralliset pelisäännöt: “mitä saa tehdä ja mitä ei” reaaliluvuilla, perustuu yksinomaan näihin aksioomiin ja niistä johdettuihin ominaisuuksiin.

Huomautus 5. Aksioomista seuraa suoraviivaisesti monia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi distributiivilain “vasen” muoto $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Määritelmä 8. Vähennyslasku määritellään vastaluvun lisäämisenä: $a - b = a + (-b)$. Samoin jakolasku määritellään käänteisluvulla kertomisena: $a/b = a \cdot b^{-1}$, jos $b \neq 0$.

Esimerkki 19. Huomaa, että reaalilukujen algebran tunnettua sääntöä, jonka mukaan nolllalla kertominen tuottaa aina nollan, *ei ole sisällytetty* edellämainittuihin aksioomiin. Tämä ei ole tarpeen, sillä näistä aksioomista seuraa loogisesti kyseinen väittämä.

Todistus. Ensinnäkin $0 = 0 + 0$ kunta-aksiooman 2 perusteella, joten $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ kunta-aksiooman 5 perusteella. Edelleen kunta-aksiooman 3 perusteella reaaliluvulla $a \cdot 0$ on vastaluku $-a \cdot 0$, joka lisäämällä yhtälön kumpaankin puoleen saadaan $a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$. Soveltamalla kunta-aksioomia 3 ja 1 saadaan tämä sievenemään muotoon $0 = a \cdot 0$.

On olemassa hyvinkin erilaisia kuntia, siis algebrallisia rakenteita, jotka toteuttavat kunta-aksioomat, mutta niiden perusrakenne on nykyisin hyvin tunnettu. Muun muuassa rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ muodostavat tällaisen järjestelmän. Vastaavat äärelliset rakenteet muodostavat tärkeän teoreettisen osan tietosiirtotekniikan virheitä korjaaville koodeille.

Reaaliluvut on myös järjestetty joukko, mikä tarkoittaa sitä että ne toteuttavat seuraavat aksioomat:

B) Järjestysaksioomat: On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
2. Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Intuitiivinen vastine joukolle $\mathbb{R}_+$ on positiivilukujen joukko, joka on suljettu kerto- ja yhteenlaskun suhteen. Aksiomaryhmää kutsutaan järjestysaksiomiksi, koska sen avulla voidaan määritellä reaalilukujen suuruusjärjestys:

Määritelmä 9. Suurempi kuin -relaatio $a > b$ määritellään seuraavasti: $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+$.

Huomautus 6. Relaatiot $a \geq b$, $a \leq b$ ja $a < b$ voidaan määritellä hyvin ilmeisellä analogisella tavalla.

Huomautus 7. Aksiomatiikkaan perustuen voidaan aika helposti näyttää toteen, että $(-1)a = -a$, siis minkä tahansa alkion a vastaluku $-a$ saadaan kertomalla yksikköalkion 1 vasta-alkiolla -1 (harjoitustehtävä).

Huomautus 8. Aksiomista seuraa myös melko suoraviivaisesti että $1 \in \mathbb{R}_+$, siis $1 > 0$, kuin myös että $(-1)(-1) = 1$.

Huomautus 9. Aksiomista seuraa myös loogisesti seuraava tulos, jonka mukaan epäyhtälömerkin suunta käännetään, mikäli kertoja on negatiivinen: Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $xz > yz$.

Edelläolevasta määritelmästä ja järjestysaksiomista seuraa tavanomaiset epäyhtälöiden käsitte-lysäännöt, mm.

- Summa ei pienene jos summattavia ei pienennetä. Symbolein tämä voidaan merkitä seuraavasti: Jos $a \leq c$ ja $b \leq d$, niin

$$a + b \leq c + d.$$

Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapauksessa, jossa summattavia ei suurenneta.

- Positiivisten lukujen tulo ei pienene jos tekijöitä ei pienennetä: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $0 \leq b \leq d$, niin

$$ab \leq cd.$$

Yllä olevia sääntöjä sovellettaessa sanotaan, että a :ta on *arvioitu ylöspäin* c :ksi ja b :tä d :ksi. Säännöt yleistyvät suoraviivaisesti myös tapaukseen, jossa summattavia tai tulon tekijöitä on enemmän kuin kaksi.

- Positiivisten lukujen osamäärä ei pienene, jos osoittajaa ei pienennetä ja nimittäjää ei suurenneta: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $b \geq d > 0$, niin

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}.$$

Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapaukselle, jossa osoittajaa pienennetään ja nimittäjää suurennetaan.

Määritelmä 10. Reaalilukujen joukossa määritellään *itseisarvo* seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0. \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

On melko helppoa todeta, että itseisarvo toteuttaa seuraavat ehdot:

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Epäyhtälöä (5) kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi* ja se seuraa suhteellisen helposti yllämainituista ominaisuuksista, mutta on joka tapauksessa hyvä painaa mieleen jo tässä vaiheessa. Itseisarvon käsitteen avulla voidaan reaalilukujen joukkoon määritellä geometria, joka yksinkertaisesti perustuu etäisyyden määritelmään.

Epäyhtälö (6) seuraa loogisesti kolmioepäyhtälöstä ja sitä kutsutaan joskus *kolmioepäyhtälön vasemmaksi puoleksi*.

Määritelmä 11 (Metriikka). Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Seuraava lause on helppo todentaa oikeaksi:

Lause 1. *Kaikille reaaliluvuille x, y ja z pätee*

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Viimeisintä epäyhtälöä kutsutaan niinkään kolmioepäyhtälöksi. Tämän nimityksen varsinainen merkitys paljastuu vasta vähintään kaksiulotteisia rakenteita tarkastellessa.

Seuraava lause kertoo, että sekä summa että tulo ovat yhteensopivia reaalilukujen metriikan suhteen siinä mielessä, että mikäli yhteenlaskettavia (tai tekijöitä) muutetaan vain vähän, niin myös summa (tai tulo) muuttuu vain vähän. Lauseessa siis oletetaan, että $a \approx c$ ja $b \approx d$.

Lause 2. *Oletetaan, että luvut a, b, c ja d ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin $M > 0$. Tällöin sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.*

Todistus. Summaa koskeva väittämä seuraa arviosta

$$d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$$

ja tuloa koskeva arvioista

$$\begin{aligned} d(ab, cd) &= |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a||b - d| + |a - c||d| \\ &= |a|d(b, d) + |d|d(a, c) \leq M(d(b, d) + d(a, c)). \end{aligned}$$

Esimerkki 20.

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3|d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x + 3| < 4 + 3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Tämä merkitsee sitä että jos x on lähellä lukua 3 (etäisyys $d(x, 3)$ on pieni), niin silloin x^2 on lähellä lukua 9, eli etäisyys $d(x^2, 9)$ on pieni.

On syytä huomioda, että edellämainitut kunta- ja järjestysaksioomat pätevät myös rationaaliluvuille $\mathbb{Q}$. Rationaaliluvut eivät kuitenkaan toteuta viimeisintä, niin sanottua täydellisyysaksioomaa. Tämän esittämistä varten määritellään seuraavat käsitteet.

Määritelmä 12. Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $x \leq M$ pätee kaikille $x \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *yläraajaksi*

Määritelmä 13. Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause 3. $S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq S) \wedge (\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists x \in A)(x > S - \varepsilon))$

Huomaa, että jos M on joukon A yläraja, niin myös mikä hyvänsä lukua M suurempi luku $M_1 > M$ on yläraja.

Huomautus 10. Lause 3 on luvun $S = \sup A$ luonnehdinta. Se ilmaisee, että ensinnäkin jokainen A :n alkio on korkeintaan S :n suuruinen (siis S on jokin yläraja) Toiseksi, jos ylärajasta S vähennetään mikä hyvänsä positiiviluku ε , niin $S - \varepsilon$ ei ole joukon A yläraja ja löytyy $x \in A$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$. Näin ollen S on ylärajoista pienin.

C) Täydellisyysaksiooma: Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on pienin yläraja.

Kysymykseen reaalilukujen olemuksesta on siis vastattu esitetyllä aksiomaattisella menetelmällä: reaaliluvut ovat joukko, jossa on määritetty yhteen- ja kertolasku ja alkio 0 ja 1 jotka toteuttavat reaalilukujen Kunta-, järjestys- ja täydellisyysaksioomat.

Huomautus 11. Jos reaalilukujoukossa A on suurin alkio $M = \max A$, on samalla myös $M = \sup A$. Kaikissa reaalilukujoukoissa ei kuitenkaan ole suurinta (eikä pienintä) alkioita. Jos esimerkiksi $A = (0, 1)$, ei A :lla ole maksimia eikä minimiä.

Täydellisyysaksiooman nojalla jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja. Pienimmän ylärajan olemassaolo on juuri se ominaisuus, joka täydentää rationaalilukujoukon aukottomaksi reaalilukujoukoksi.

Esimerkki 21. Esimerkin 18 perusteella joukolla $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1 \wedge q^2 \leq 2\}$ ei voi olla pienintä ylärajaa rationaalilukujen joukossa. Sen sijaan reaalilukujen joukossa sillä on pienin yläraja jota merkitään symbolilla $\sqrt{2}$.

Kääntämällä asetelma nurinpäin, siis tarkastelemalla joukkoa $-A = \{-a \mid a \in A\}$ joukon A sijaan voidaan pienimmän ylärajan sijaan puhua *suurimmasta alarajasta*. Muunnosta $A \rightarrow -A$ hyväksi käyttäen voidaan todeta, että täydellisyysaksiooma takaa suurimman alarajan olemassaolon, jos A on *alhaalta rajoitettu* epätyhjä reaalilukujoukko.

Määritelmä 14. Reaalilukujoukon A suurinta alarajaa kutsutaan nimellä *infimum* ja siitä käytetään merkintää $\inf A$.

Huomautus 12. Jos joukossa A on pienin alkio $\min A$, on $\min A = \inf A$.

Huomautus 13. Jos $A \subseteq B$ on epätyhjä sekä B ylhäältä rajoitettu, on myös B epätyhjä ja A ylhäältä rajoitettu sekä $\sup A \leq \sup B$. Analoginen tulos pätee infimumille: $\inf B \leq \inf A$.

3.3 Aksiomatiikan seurauksia

Reaaliluvuille pätee monia rationaaliluvuille tuttuja tuloksia, kuten esimerkiksi kahden eri reaaliluvun välissä a ja b on aina mm. näiden keskiarvo $\frac{1}{2}(a + b)$. Erityisesti ei ole olemassa pienintä positiivilukua, vaan mitä tahansa positiivilukua ε kohti voidaan löytää pienempi positiiviluku $\frac{\varepsilon}{2}$.

Myös rationaaliluvuille tuttu tulos on voimassa, mutta todistus pitää esittää toisella tavalla.

Lause 4 (Arkhimedeen aksiooma). Jos M ja ε ovat positiivisia reaalilukuja, on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N\varepsilon > M$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan väitettyä lukua N ei ole olemassa, siis $n\varepsilon \leq M$ kaikille luonnollisille luvuille n . Tällöin siis joukko $A = \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ on ylhäältä rajoitettu. Joukko on A selvästi epätyhjä, joten sillä on täydellisyysaksiooman nojalla pienin yläraja $S = \sup A$. Koska ε oletettiin positiiviseksi ja S joukon A pienimmäksi ylärajaksi, ei $S - \varepsilon$ voi olla joukon A yläraja. Tämän vuoksi joukossa A on alkio $m\varepsilon$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$, siis

$$m\varepsilon > S - \varepsilon,$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$(m+1)\varepsilon > S$$

kanssa. Nyt kuitenkin $(m+1)\varepsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon A yläraja. Ristiriidasta voidaan päätellä vastaoletus vääräksi. $\square$

Huomautus 14. Lauseen 4 on alunperin kutsuttu Arkhimedeen aksioomaksi, sillä vastaava tulos Arkhimedeen (n. 287 – 212 eKr) käyttämänä geometrisessa yhteydessä käsitettiin aikanaan aksioomana. Nykymatematiikassa tällä tuloksella ei ole aksiooman statusta, vaan nimitys on ainoastaan historiallista perua.

Määritelmä 15. Luku $\varepsilon > 0$ on *infinitesimaali* (äärettömän pieni), jos

$$n\varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \dots + \varepsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lauseen 4 sanoma voidaan siis ilmoittaa siten, että reaalilukujen joukossa **ei ole** infinitesimaaleja. Juuri näin myös Arkhimedes asian mielsi aikakautensa käsitteiden valossa. Koska differentiaalilaskennan kehittäjät Newton ja Leibniz kaiketi tunsivat Arkhimeden työt varsin hyvin, on matematiikan historian kannalta vähintäänkin mielenkiintoista että rakensivat teoriansa nimenomaan infinitesimaalien varaan.

Reaalilukujen joukossa ei niinkään ole ääretöntä, vaan jokaista lukua $M \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa suurempi luku, esimerkiksi $M+1 > M+0 = M$. Symboleja ∞ ja $-\infty$ käytetään tällä kurssikokonaisuudella vain raja-arvomerkintöjen yhteydessä, jolloin ne eivät viittaa aktuaaliseen (eli todella olemassa olevaan) äärettömyyteen, vaan toimivat vain merkintöinä, jotka viittaavat siihen, että muuttuja voidaan valita miten suureksi ($\rightarrow \infty$) tai miten pieneksi ($\rightarrow -\infty$) tahansa.

Seuraus 1. Jos $a < b$, on välillä (a, b) rationaaliluku.

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $b \geq 0$ ja merkitään $d = b - a$. Lauseen 4 mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N \cdot 1 > \frac{1}{d}$, mikä merkitsee, että $d > \frac{1}{N}$. Lauseen 4 perusteella on myös olemassa sellainen kokonaisluku n , että $n \cdot 1 \geq Nb$. Olkoon M pienin tällaisista kokonaisluvusta, jolloin siis $M - 1 < Nb \leq M$. Tämä merkitsee sitä, että $\frac{M-1}{N} < b \leq \frac{M}{N}$. Lisäksi

$$\frac{M-1}{N} = \frac{M}{N} - \frac{1}{N} > b - d = b - (b - a) = a,$$

mikä osoittaa, että $\frac{M-1}{N}$ voidaan valita väitteessä mainituksi rationaaliluvuksi.

Jos $b < 0$, voidaan väittämä todistaa oikeaksi soveltamalla edellistä päättelyä väliin $(-b, -a)$. $\square$

Seuraus 2. Jos $x \in (a, b) = A$, on olemassa sellaiset rationaaliluvut q_1 ja q_2 , että $x \in [q_1, q_2] \subseteq A$.

Seuraus 3. Jos $\alpha \in \mathbb{R}$, ja $n \in \mathbb{N}$, niin on olemassa sellainen rationaaliluku $q = \frac{a}{b}$, että $|\alpha - q| < \frac{1}{n}$.

Todistus. Edellisen seurauksen mukaan reaalilukuvälillä $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$ on olemassa rationaaliluku q , siis $\alpha - \frac{1}{n} < q < \alpha + \frac{1}{n}$, mistä seuraa $-\frac{1}{n} < q - \alpha < \frac{1}{n}$. Viimeisin epäyhtälöketju merkitsee sitä, että $|q - \alpha| < \frac{1}{n}$. $\square$

Huomautus 15. Edellinen seuraus ilmaisee sen, että minkä hyvänsä reaaliluvun α miten pienestä läheisyydestä tahansa voidaan aina löytää rationaaliluku. Toisin ilmaistuna: mitä hyvänsä reaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Käyttämällä tietoa että $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on mahdollista muokata edellisen lauseen todistusta sen toteennäyttämiseksi, että kaikilla reaalilukuväleillä on myös aina irrationaaliluku.

Luku 4

Yleisimmät reaalifunktiot

4.1 Terminologiaa

Määritelmä 16. Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*. Joukkoa A kutsuaan *lähtöjoukoksi* tai *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa B *maalijoukoksi*.

Tässä yhteydessä ”funktio” ymmärretään lukiokurssin pohjalta esitettynä intuitiivisena käsitteenä. Funktio siis mielletään ikään kuin ”operaationa”, joka siirtää x :n (alkukuva) kuvaksi $y = f(x)$.

Geometriasta kumpuavien syiden vuoksi reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ nimitetään myös *reaalisuoraksi* tai *reaaliakseliksi*, ja sen alkioita (siis reaalilukuja) *pisteiksi*,

Tässäkin intuitiivisessa käsityksessä voidaan otta huomioon se, että funktiota ei välttämättä ole tarpeen tai voida määritellä koko tarkastatelujoukossa, joka lähtökohtaisesti saattaisi olla koko reaaliksieli $\mathbb{R}$. Samoin voidaan huomioida, että funktion arvot eivät kenties peitä koko reaalilukujen joukkoa, vaan ainoastaan osan siitä. On myös huomattava, että funktion käsitteeseen liittyy olennaisena osana sekä määrittelyjoukko että maalijoukko. Vaikka näitä ei aina eksplisiittisesti mainittaisi, ne sisältyvät silti olennaisena osana funktion käsitteeseen.

Näin ollen esimerkiksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ käsitetään erilaisena funktiona kuin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, missä ensimmäisen funktion maalijoukko on koko $\mathbb{R}$, mutta jälkimmäisen vain $\mathbb{R}_+$.

Seuraavat määritelmät on syytä painaa mieleen, sillä ne tulevat esille myöhemmin kurssikokonaisuuden eri osissa.

Määritelmä 17. Olkoon $f : A \rightarrow B$ reaalifunktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Huomautus 16. Injektiivisyys esittää myös muodossa (mieti miksi!)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tätä kutsutaan ylläolevan esitystavan loogiseksi kontrapositioksi.

Määritelmä 18. Reaalifunktiolle $f : A \rightarrow B$ määritellään seuraavasti:

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Määritelmä 19. Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä 20. Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunksioksi*

Esimerkki 22. Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä 21. Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Seuraava lause karakterisoi (luonnehtii) ne reaalifunktiot, joille käänteisfunktio on olemassa.

Lause 5. Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio.

1. Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
2. Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

4.2 Polynomi- ja rationaalifunktiot

Määritelmä 22 (Polynomifunktiot). Polynomifunktio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään lausekkeella

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Huomautus 17. Erityisesti huomionarvoista polynomifunktioissa on se, että niiden määrittelyssä ei tarvita muuta kuin reaalilukujen ”sisäänrakennettuja” laskutoimituksia: yhteen- ja kertolasku. Kokonaislukupotenssiin korotushan on toistettua kertolaskua. Tästä seuraa muun muassa se, että polynomin arvon laskeminen tietyllä muuttujan arvolla on varsin selkeää, mikäli muuttuja ja kertoimet on annettu jossain systemaattisessa muodossa rationaalilukuina tai niiden approksimaatioina. Tällöin on periaatteessa mahdollista laskea funktion arvo vaikkapa kynää ja paperia käyttäen, mutta nykyisin mielekäämpi tapa on ajatella, että funktion arvon (approksimatiiviseen) laskemiseen voidaan

laatia tietokoneohjelma. Sellaisia on tietysti jo laadittu vaikka kuinka paljon, mutta tämän kurssin tavoitteiden kannalta on tärkeää hallita ne periaatteet, joiden pohjalta mainitut ohjelmat voitaisiin laatia.

Seuraava laajennus ei ole numeeriselta kannalta kovin paljon vaikeampi kuin polynomifunktiot, mutta korostaa sitä, että reaalfunktion ei välttämättä tarvitse olla määritelty koko reaaliakselilla.

Määritelmä 23. Rationaalifunktiot määritellään kahden polynomin osamääränä

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliarvoille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkki 23. Lauseke $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ määrittelee polynomifunktion, joka on määritelty koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Lauseke $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$ määrittelee rationaalifunktion, kun $x \neq 1$.

4.3 Eksponenttifunktiot

Tässä luvussa tarkastellaan miten eksponenttifunktio voidaan määritellä. Kiinnitetään ensiksi kantaluku $a \in \mathbb{R}_+$ ja määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}.$$

Määritelmästä seuraa selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn} \tag{4.1}$$

aina kun m ja $n \in \mathbb{N}$. Määritelmää pyritään laajentamaan siten, että ominaisuudet (4.1) toteutuisivat myös laajennuksessa.

Näin toimien voidaan havaita, että

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0,$$

mistä seuraa että $a^0 = 1$, sillä $a \in \mathbb{R}_+$.

Eksponenttifunktion laajennus negatiivisille kokonaisluvuille voidaan niinikään tehdä vaatimalla että (4.1) toteutuu. Silloin nimittäin

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n} a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi miten pitäisi määritellä $a^{\frac{1}{n}}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tätä varten otetaan käyttöön seuraava määritelmä.

Määritelmä 24. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Luku $\alpha > 0$ on luvun $a > 0$ n :s juuri, jos $\alpha^n = a$. Tällöin merkitään $\alpha = \sqrt[n]{a}$. Tapauksessa $n = 2$ juurta kutsutaan *neliöjuureksi* ja tapauksessa $n = 3$ *kuutiojuureksi*.

Huomautus 18. Otaksoma $a \in \mathbb{R}_+$ on tarpeen juuren olemassaolon takaamiseksi. Jos esimerkiksi $a = -1$, ei ole sellaista reaalilukua α , että $\alpha^2 = -1$. Tämä voidaan ilmaista myös sanomalla, että luvulla -1 ei ole reaalista neilöjuurta.

Esimerkki 24. Sekä $2^2 = (-2)^2 = 4$, mutta määritelmän mukaan neliö- ja muut juuret ovat positiivisia lukuja, siis $\sqrt{4} = 2$.

Koska $(-2)^3 = -8$, olisi johdonmukaista määritellä $\sqrt[3]{-8} = -2$. Näin ei kuitenkaan tehdä tällä kurssilla, vaan juuren määritelmässä rajoitaudutaan positiivisiin juurrettaviin. Kurssin seuraavassa osassa esiteltävä kompleksilukujen käsite paljastaa, että juuren käsite voidaan myös parillisessa tapauksessa laajentaa negatiiviselle reaaliakselille ja mikä vielä tärkeämpää, että tällöin juurikäsitettä ei kannata tarkastella funktiona vaan pikemminkin näitä yleisemmän kattokäsitteen – relaatioiden – valossa.

Huomautus 19. Vaikka $a > 0$, ei juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo silti ole mitenkään itsestään selvää. Palauta mieleen Pythagoraan löytö, jonka mukaan rationaalilukujen joukossa ei ole merkinnällä $\sqrt{2}$ luonnehdittavaa lukua. Reaalilukujen joukossa sen sijaan juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo voidaan todistaa täydellisyysaksioomaan nojautuen.

Reaalisen juuren yksikäsitteisyys on hyvin helppo todeta sen perusteella, että kun $n \in \mathbb{N}$, on funktio $f(x) = x^n$ kasvava positiivisella reaaliakselilla.

Ominaisuuksien (4.1) valossa pitäisi olla

$$a = a^{\frac{1}{n} \cdot n},$$

jolloin voidaan siis todeta, että $a^{\frac{1}{n}}$ pitää nimenomaan määritellä $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Koska jokainen rationaaliluku voidaan kirjoittaa muodossa $r = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$, voidaan tämän jälkeen suoraviivaisesti määritellä

$$a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esimerkki 25. $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

Viimeisin vaihe eksponenttifunktion määrittelyjoukon laajentamisessa on ponnistaa määrittelyjoukosta $\mathbb{Q}$ määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}$. Oletetaan tätä varten aluksi että $a > 1$. Aiemmin esitettyjen käsitteiden valossa laajennus on periaatteessa yksinkertaista: Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, valitaan sellainen jono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ rationaalilukuja, että $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellään

$$a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}.$$

Tapaus $0 < a < 1$ voidaan palauttaa tapaukseen $a > 1$ yhtälön $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ kautta.

Tämä määritelmä tarkoittaa käytännössä sitä, että mikäli irrationaalilukua x voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaalilukujonon $r_1, r_2, r_3, \dots$ avulla, saadaan vastaavasti arvolle a^x mielivaltaisen tarkkoja approksimaatioita reaalilukujonon $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$ avulla.

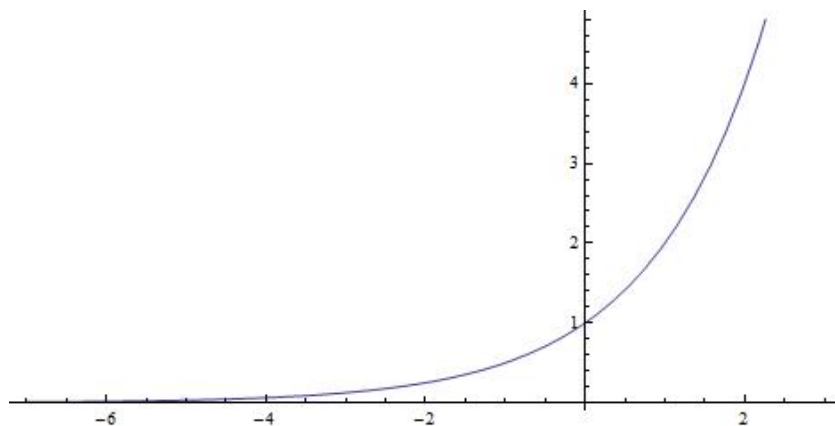
Tämä määrittely vaikuttaa hyvin johdonmukaiselta, mutta sisältää kuitenkin joitakin kyseenalaisia seikkoja. Näistä ensimmäinen on se, että irrationaalilukua x kohti lähestyviä rationaalilukujonoja on äärettömän monta, miksi siis a^x on aina sama riippumatta siitä mikä jono valitaan? Seuraava ongelma lienee tarkistaa että ominaisuudet (4.1) toteutuvat myös koko reaaliakselilla määritellylle a -kantiselle eksponenttifunktiolle. Näitä ei kuitenkaan ryhdytä tarkistamaan tällä kurssilla, vaan esitetään seuraava lause ilman todistusta.

Lause 6. Olkoon $a > 0$. Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä eksponenttifunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$ joka toteuttaa seuraavat ehdot:

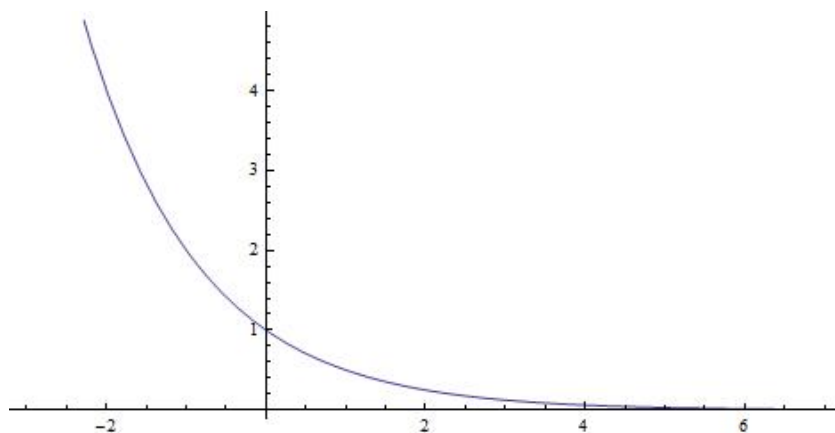
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta

- Molemmissa tapauksissa f on bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

Huomautus 20. Laskennalliselta kannalta erityisen huomionarvoinen on viimeisin kohta, joka kertoo sen, että mikäli tunnetaan menetelmä a -kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi sekä yhteys $b = a^c$, niin tästä saadaan menetelmä b -kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi.



Kuva 4.1 $y = 2^x$



Kuva 4.2 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4.4 Logaritmifunktiot

Määritelmä 25. Olkoon $a > 0$. Tällöin a -kantainen logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään a -kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Huomautus 21. Määritelmästä seuraa, että $a^{\log_a y} = y$ aina kun $y \in \mathbb{R}$ ja $\log_a a^x = x$ aina kun $x \in \mathbb{R}$

Seuraavan lauseen väittämät seuraavat suoraan eksponenttifunktion ominaisuuksista.

Lause 7. Logaritmifunktio toteuttaa seuraavat ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

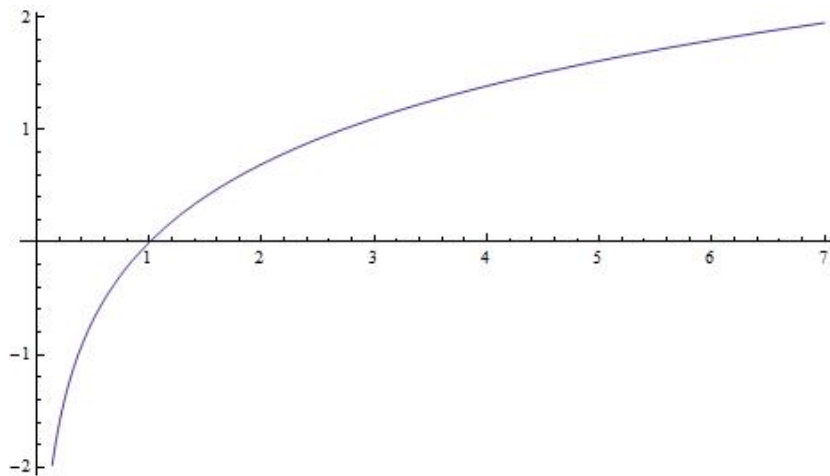
Huomautus 22. Laskennalliselta kannalta viimeisin kohta on hyvin merkittävä. Se kertoo, että jos a -kantaisen logaritmiin (liki)arvojen laskemiseksi on olemassa jokin menetelmä, niin silloin on myös menetelmä b -kantaisen logaritmin (liki)arvojen laskemiseksi.

On myös huomattava, että yhtälöstä $b = a^c$ seuraa $c = \log_a b$.

Määritelmä 26. Neperin luku $e = 2,71828182845904523536 \dots$ on irrationaaliluku jonka tarkempaan määritelmään pureudutaan vasta kurssin seuraavissa osissa.

Sekä e -kantaiselle eksponenttifunktiolle että e -kantaiselle logaritmille on kuitenkin olemassa vakiintuneet merkinnät, e^x merkitään usein $\exp(x)$ ja $\log_e x$ yleensä $\ln x$. Kymmenkantaiselle logaritmille on myös olemassa melko vakiintunut merkintä $\log_{10} x = \lg x$

Huomautus 23. e -kantaista logaritmia kutsutaan nimellä *luonnollinen logaritmi*. Merkintöjen e^x ja $\exp(x)$ suhteesta on matemaattisessa kirjallisuudessa muitakin tulkintoja, mutta $\log_e x$ ja $\ln x$ käsitellään poikkeuksetta saman asian eri merkinnöiksi.



Kuva 4.3 $y = \ln x$

Esimerkki 26. Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$

4.5 Trigonometriset funktiot

Edelläkuvattujen lisäksi yksi varsin yleisesti esiintyvän reaalifunktiotyyppin muodostavat *trigonometriset funktiot*. Trigonometriset funktiot voidaan määritellä täsmällisesti sarjaopin avulla, mutta tässä yhteydessä tyydytään intuitiivisempaan kuvailuun.

Kulman suuruus on perinteisesti esitetty jakamalla täysi ympyrä 360 asteeseen, jolloin puoliympyrän suuruudeksi saadaan 180° ja suoran kulman suuruudeksi 90° . Vaikka tämänkaltainen valinta juontaa juurensa viiden vuosituhannen takaisesta sumerilaisten lukujärjestelmästä, on valinta 360 täyden ympyrän mitaksi silti matemaattiselta kannalta mielivaltainen, vaikkakin hyvin vakiintunut.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta kulman suuruus tulee määritellä absoluuttisissa yksiköissä joille on annettu nimi *radiaani*, mutta joihin voidaan yhtä lailla viitata ilman mitään yksikköä, sillä kyseessä on suhdeluku.

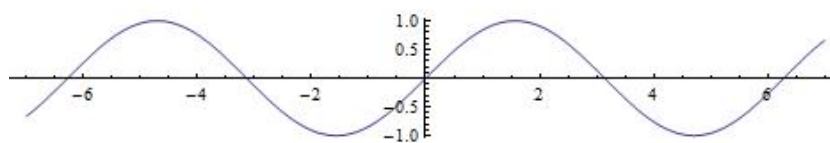
Määritelmä 27 (Kulman suuruus). Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π .

Määritelmä 28 (Sini ja kosini). Kulman, joka kiertyy positiiviselta x -akselilta vastapäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y -koordinaatti ja *kosini* x -koordinaatti.

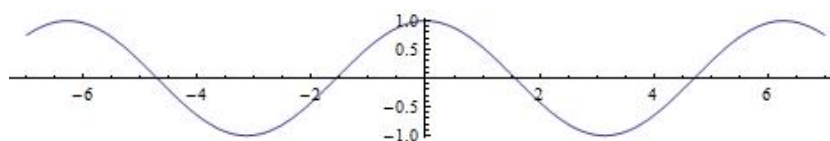
Käyttämällä moninkertaisia kierroksia sekä myötäpäivään kiertymistä voidaan sini ja kosini määritellä kaikille mahdollisille reaaliluvuille. Edelleen huomataan, että sini ja kosini voivat saada arvoja vain väliltä $[-1, 1]$, mutta huomattavin ominaisuus on, että kumpikin funktio on *jaksollinen*:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi)$$

kaikille mahdollisille reaaliluvuille x . Trigonometriset funktiot toteuttavat lukuisia identiteettejä (yhtäsuuruuksia, jotka pätevät kaikille muuttujan arvoille) joita on listattu taulukoihin. Näistä tunnetuimpia ovat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Myös identiteetti $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ on huomattava, sillä siitä ilmenee että kosini ja sini ovat itse asiassa koordinaatiston siirtoa vaille samat funktiot.



Kuva 4.4 $y = \sin x$



Kuva 4.5 $y = \cos x$

Määritelmästä nähdään helposti myös oikeaksi seuraava tulos.

Lause 8 (Sinin ja kosinin nollakohdat).

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

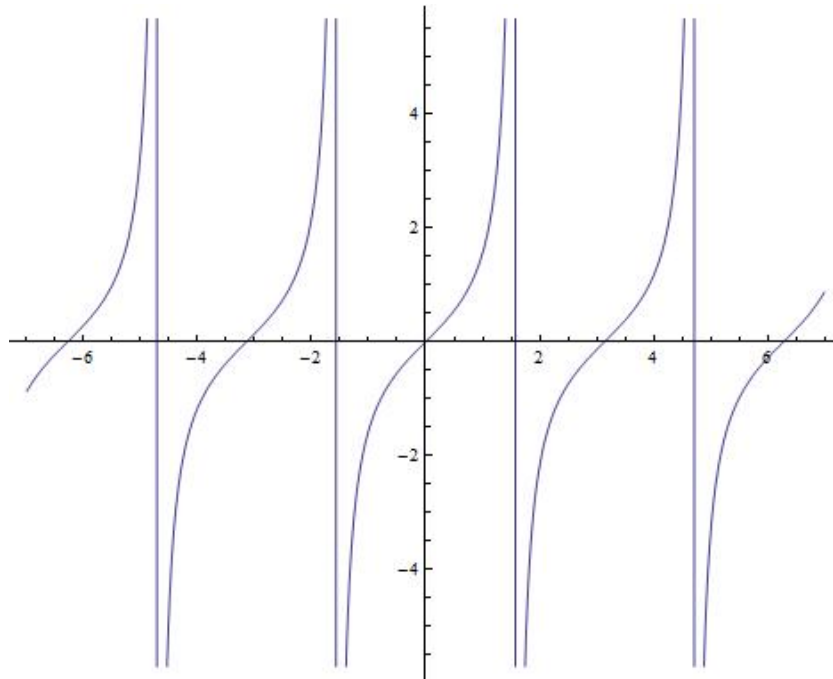
Funktiona $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sini ei ole surjektio, sillä se saa vain välillä $[-1, 1]$ olevia arvoja. Sini ei myöskään ole injektio, sillä se on jaksollinen ja saa täten samoja arvoja 2π :n välein. Näin ollen sini ei ole bijektio eikä sillä siis ole käänteisfunktioita. Sopivasti lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla sinistä saadaan aikaan bijektio, esimerkiksi

funktio $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ on bijektio, jonka käänteisfunktioita kutsutaan *arkussiniksi* ja merkitään $\arcsin x$ tai $\sin^{-1}x$.

Arkuskosini $\arccos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ määritellään analogisesti.

Tangentti voidaan määritellä kaavalla $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, jolloin saadaan kaikilla muilla reaaliarvoilla paitsi joukossa $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ määritelty funktio. Osoittautuu, että tangentti on π -jaksollinen funktio, joka on kasvava välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja saa kaikki reaaliarvot tällä välillä.

Funktio $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio ja sen käänteisfunktioita kutsutaan *arkustangentiksi*.



Kuva 4.6 $y = \tan x$

4.6 Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia

Lause 9. Sini ja kosini toteuttavat seuraavat väittämät:

1. $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$
2. $\sin(t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$
3. $\sin(-t) = -\sin t$
4. $\cos(-t) = \cos t$
5. $\cos(t + \pi) = -\cos t$
6. $\sin(t + \pi) = -\sin t$
7. $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
8. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
9. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
10. $|\sin x| \leq |x|$

Todistus. Mahdollisesti väittämiä 9 ja 10 lukuunottamatta kaikkien perustelut esiintyvät lukiokursilla. Väittämä 9 on seuraus monista eri väittämien 8 versioista, ja perehdytään tarkemmin väittämään 10. Kohdan 3 perusteella riittää käsitellä tapausta $x \geq 0$. Lisäksi voidaan olettaa, että $x \leq 1$, koska joka tapauksessa $\sin x \leq 1$. Koska $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, perustellaan väittämä geometriseen intuition nojautuen: $\sin x$ vastaa matkaa kehäpisteeltä kohtisuoraan x -akselille, kun taas x vastaa matkaa kehäpisteeltä yksikköympyrän kaarta pitkin x -akselille, joten $\sin x < x$.

Huomautus 24. Ylläolevan lauseen viimeisimmästä väittämästä on kuitenkin välittömiä seurauksia trigonometrinen funktioiden ominaisuuksiin. Nyt nimittäin

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$. Samoin voidaan osoittaa, että $d(\cos x, \cos y) \leq d(x, y)$.

Määritelmä 29. Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$. Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on *kutistava* joukossa I , jos $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ aina kun $x, y \in I$.

Kutistavuus tarkoittaa siis sitä, että kuvat $f(x)$ ja $f(y)$ ovat lähempänä toisiaan kuin alkukuvat x ja y . Yllämainitun perusteella sini ja kosini ovat kutistavia funktioita koko reaaliakselilla.

4.7 Reaalifunktioiden esitystapoja

Määritelmä 30.

- Reaalifunktion esittämistä lausekkeen avulla, esimerkiksi $f(x) = x^2$, sanotaan *eksplisiittimuodoksi*.
- *Implisiittimuodossa* funktio f ilmaistaan yhtälöiden $F(x, y) = 0$ ja $y = f(x)$ avulla. Esimerkiksi $xy - 1 = 0$ määrittelee implisiittisesti funktion, jolle pätee $y = f(x) = \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$.
- *Parametrimuodossa* reaalifunktio f määritellään kahden muun reaalifunktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ määrittämän pisteistön $\{(g(t), h(t)) \mid t \in I\}$ avulla siten, että $x = g(t)$ ja $y = f(x) = h(t)$. Muuttujaa t kutsutaan *parametriksi*.

Esimerkki 27. Lauseke $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ määrittelee reaalifunktion välillä $[-1, 1]$ *eksplisiittisesti*. Eksplisiittiselle määrittelylle tyypillistä on se, että se tarjoaa laskennallisesti suoraviivaisen tavan funk-

tion (likimääräisen) arvon laskemiselle, olettaen että laskennalliset menetelmät tunnetaan osafunktiolle, tässä tapauksessa neliöinnille $x \mapsto x^2$, vähennyslaskulle $x^2 \mapsto 1 - x^2$ ja neliöjuuren laskemiselle.

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee saman funktion *impisiittisesti*. Jotta tästä määritelmästä saataisiin funktio, pitää rajoittaa esim. $y \geq 0$ ja myös x sopivalle välille, esim $x \in [-1, 1]$.

Parametrimuoto implisiittimuotoiselle funktiolle $x^2 + y^2 = 1$ perustuu sinin ja kosinin määritelmään: Valitaan parametriksi kulma $t \in [0, \pi]$. Tällöin piste $(\cos t, \sin t)$ kuuluu yksikköympyrän yläpuolelle. Kun $t = 0$, kyseessä on piste $(1, 0)$, ja kun $t = \pi$, saadaan piste $(-1, 0)$. Kutakin parametrin arvoa $[0, \pi]$ vastaa yksikäsitteinen yksikköympyrän yläpuolen piste.

Huomautus 25. Parametrimuoto voidaan tulkita myös liikkeenä xy -tasossa: Parametri t tulkitaan ajaksi, jolloin ajanhetkellä $t \in [0, \pi]$ tarkasteltavan pisteen koordinaatit ovat $(\cos t, \sin t)$.

4.8 Binomikaava

Tässä luvussa esiteltävää binomikaavaa varten esitellään ns. *binomikertoimet* ja tarkastellaan joitakin niiden ominaisuuksia. Johdantona binomikaavaan voidaan tarkastella binomin $a + b$ potensseja

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b, & (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, & (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, & \text{jne.}\end{aligned}$$

Edellisissä esimerkeissä $(a+b)^n$ on summalauseke, jossa esiintyvät termit $C_{n,i}a^{n-i}b^i$ ja jokaisessa termissä $C_{n,i}$ on jokin tietty kerroin. Newtonin binomikaava selvittää kertoimien $C_{n,i}$ muodon.

Määritelmä 31. Olkoon $0 \leq n \leq m$. Binomikerroin $\binom{m}{n}$ määritellään

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Esimerkki 28.

$$\begin{aligned}\binom{m}{0} &= \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1, & \binom{m}{1} &= \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m, \\ \binom{m}{2} &= \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.\end{aligned}$$

Lause 10. Jos $1 \leq n \leq m-1$, niin $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

Todistus. Tässä todistuksessa esiintyy ainoastaan yhtäsuuruuksia, jotka on perusteltavissa määritelmillä tai (reaali)lukujen perusominaisuuksilla:

$$\begin{aligned}
& \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \\
&= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \\
&= \binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

Taustatietoa



Blaise Pascal (1623–1662) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka katsotaan perustaneen todennäköisyyslaskennan. Hän tutki myös projektiivista geometriaa. Pascalin mukaan on nimetty paineen yksikkö ja ohjelmointikieli.

(kuva: Wikimedia Commons)

Huomautus 26. Lauseen 10 mukaisesti binomikertoimet muodostavat ns. *Pascalin kolmion*, jonka kukin alkio askemalla yläoikealla ja ylävasemmalla olevat alkioit yhteen:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \binom{0}{0} & & & \\
& & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
& \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
& \dots & & & & & & \dots &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccc}
& & & 1 & & & \\
& & 1 & & 1 & & \\
& 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& \dots & & & & & & \dots &
\end{array}$$

Binomikertoimen merkitys kombinatoriikassa (yhdistelmiä tutkiva matematiikan haara) on seuraava: $\binom{m}{n}$ ilmaisee niiden tapojen määrän, joilla $m:n$ alkion joukosta voidaan valita n alkioita, kun valintajärjestykseen ei kiinnitetä huomiota. Tämä voidaan havaita oikeaksi seuraavasti: Olkoon $C(m, n)$ mainittu tapojen määrä. Koska valitut n alkioita voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla, on $n!C(m, n)$ niiden tapojen määrä, joilla voidaan $m:n$ alkion joukosta valita n alkioita järjestys huomioon ottaen. Koska ensimmäinen alkio voidaan valita $m!$ tavalla, toinen $m-1!$ tavalla, jne., on tämä määrä $m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)$. Näin ollen

$$n!C(m, n) = m(m-1) \cdots (m-n+1),$$

mistä jakolaskulla ja määritelmiä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
C(m, n) &= \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} \\
&= \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1) \cdot (m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

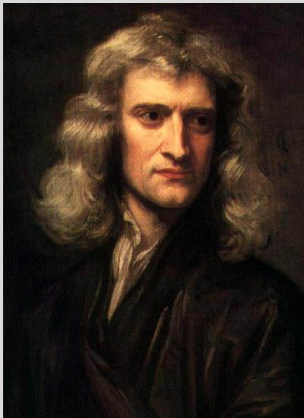
Esimerkki 29. Joukosta $\{1, 2, 3, \dots, 39\}$ voidaan valita 7 numeroa $\binom{39}{7} = \frac{39!}{7! \cdot 32!} = 15380937$ eri tavalla.

Lause 11 (Newtonin binomikaava).

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Todistus. Todistus esitetään luennolla.

Taustatietoa

Sir Isaac Newton (1643–1728) oli englantilainen matemaatikko, fyysikko, filosofi ja alkemisti. Newton esitti mekaniikan perustavat liikelait sekä yleisen gravitaatiolain. Hän kehitti differentiaali- ja integraalilaskennan riippumatta Gottfried Leibnizin samanaikaisesta työstä. Newtonin katsotaan kuuluvan Gaussin ja Arkhimedeen ohella maailmanhistorian merkittävimpien matemaatikkojen joukkoon.

(kuva: Wikimedia Commons)

Luku 5

Kompleksiluvut

Lukualueiden laajentamista luonnollisten lukujen joukosta $\mathbb{N}$ laajempiin joukkoihin voidaan tarkastella monelta kannalta. Algebrallinen lähestymistapa kiinnittää huomiota polynomiyhtälöiden ratkeavuuteen, esimerkiksi yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua luonnollisten lukujen joukossa, mutta kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$ sillä on ratkaisu $x = -1$. Vastaavasti yhtälö $2x = 1$ on kokonaislukujen joukossa ratkeamaton, mutta laajennettaessa kokonaislukujen joukkoa rationaalilukujen joukoksi $\mathbb{Q}$ saadaan yhtälölle ratkaisu $x = \frac{1}{2}$. Samoin yhtälö $x^2 - 2 = 0$ on rationaalilukujen joukossa ratkeamaton, mutta reaalitylukujen joukossa $\mathbb{R}$ sillä on kaksikin ratkaisua, nimittäin $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

Helposti huomataan, että reaalitylukuakaan eivät takaa polynomiyhtälön ratkeavuutta: esimerkiksi yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Tämän puutteen korvaamiseksi otetaan käyttöön *kompleksiluvut*.

5.1 Kompleksilukujen määritelmä ja peruslaskutoimitukset

Määritelmä 32. Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi = x + iy$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$. Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.

Edellisen määritelmän mukaan kompleksiluku $x + yi$ voidaan käsittää reaalitylukuparina (x, y) . Koska jokainen reaalityluku voidaan kirjoittaa muotoon $x = x + 0i$, voidaan reaalityluvut käsittää kompleksilukujen erikoistapauksiksi ja siis $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Huomautus 27. Koska imaginaariyksikkö toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$, voidaan periaatteessa merkitä $i = \sqrt{-1}$. Tällöin pitäisi kuitenkin olla $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1 \cdot i)(-1 \cdot i) = (-1)^2 i^2 = i^2 = -1$. Täten siis näyttää siltä, että myös $-i$ toteuttaa yhtälön $(-i)^2 = -1$ eikä neliöjuuri $\sqrt{-1}$ olisi yksikäsitteinen. Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

Huomautus 28. Symbolia i käytetään toisinaan merkitsemään vaihtovirtaa, ja siksi erityisesti sähkötekniikan yhteydessä imaginaariyksiköstä käytetään i :n sijaan merkintää j .

Esimerkki 30. Yhtälöllä $x^2 - 2x + 5 = 0$ ei ole reaalityratkaisuja, koska $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$ aina kun $x \in \mathbb{R}$. Sen sijaan yhtälöllä on kaksi kompleksista ratkaisua, jotka saadaan seuraavasti: $x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4i^2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 2i \Leftrightarrow x = 1 \pm 2i$.

Määritelmä 33. Kompleksiluvun $z = x + yi$ reaalityosa määritellään $\operatorname{Re}(z) = x$ ja imaginaarityosa $\operatorname{Im}(z) = y$.

Yhteenlasku kompleksiluvuilla on suoraviivainen: $(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, ja kertolaskua varten muistetaan, että $i^2 = -1$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i \\ &= x_1x_2 + y_1y_2i^2 + x_1y_2i + y_1x_2i \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.\end{aligned}$$

Vähennyslasku on yhteenlaskun kanssa analoginen, ja jakolaskun helpottamiseksi otetaan ensin käyttöön *liittoluvun* käsite.

Määritelmä 34. Kompleksiluvun $z = x + yi$ *liittoluku* (tunnetaan myös nimellä *kompleksikonjugaatti*) on $\bar{z} = x - yi$.

Lause 12. Jos z_1 ja $z_2 \in \mathbb{C}$, niin $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ja $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Kompleksilukujen jakolaskussa kannattaa usein laventaa jakajan liittoluvulla:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} &= \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + x_2y_1i - x_1y_2i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.\end{aligned}$$

Kompleksiluvuilla on siis monia reaalilukujen kaltaisia ominaisuuksia: niille voidaan määritellä summa, erotus, tulo ja osamäärä, jotka vielä toteuttavat samankaltaisia sääntöjä kuin reaalilukujen vastaavat operaatiot. On esimerkiksi helppo tarkistaa, että kompleksiluvuille z_1, z_2 ja z_3 pätevät sekä *vaihdantalaki eli kommutatiivisuus* $z_1z_2 = z_2z_1$ sekä *osittelulaki eli distributiivisuus* $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$. Lisäksi kompleksiluvuille pätee tulon nollasääntö eli $z_1z_2 = 0$ tarkalleen silloin kun joko $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, tai $z_1 = z_2 = 0$ (tulon nollasääntö on itse asiassa seuraus siitä, että jokaisella nollassa eroavalla luvulla on käänteisluku). Voidaan itse asiassa näyttää toteen, että kompleksiluvut toteuttavat luvun ?? kunta-aksioomat.

5.2 Kompleksilukujen graafinen esitys, itseisarvo ja polaariesitys

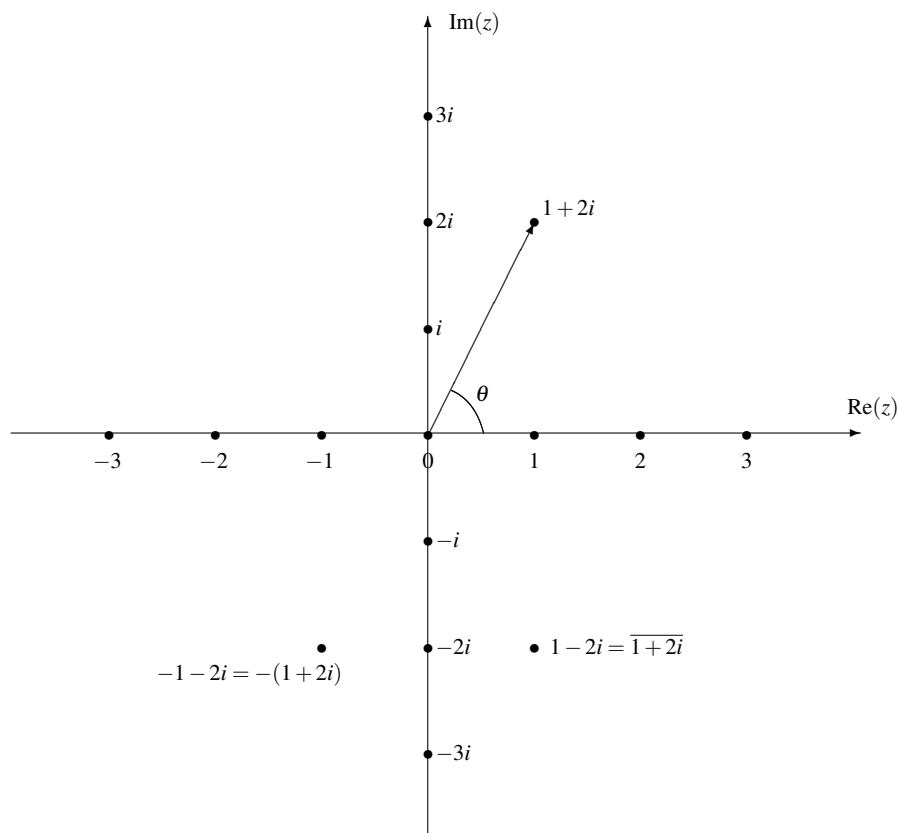
Kompleksiluku voidaan käsittää reaalilukuparina, joten luonteva graafinen esitys kompleksiluvuille on tason piste (Kuva 5.1).

Kompleksilukuja ei kuitenkaan voida yleisesti ottaen järjestää suuruusjärjestykseen kuten reaalilukuja. Ei voida määritellä milloin kompleksiluku on suurempi kuin toinen, mistä seuraa, että kompleksilukujen kohdalla ei voi puhua epäyhtälöistä. Sen sijaan kompleksiluvuille voidaan määritellä *itseisarvo* ja kahden eri kompleksiluvun itseisarvoa voidaan verrata.

Määritelmä 35 (Kompleksiluvun itseisarvo). Olkoon $z = x + yi$. Tällöin $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Samoin kuin reaalilukujen tapauksessa, kompleksilukujen itseisarvo merkitsee *etäisyyttä nollasta (origosta)* (Kuva 5.1).

Huomautus 29. Edellisen määritelmän merkinnöin $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Tästä seuraa lauseen 12 perusteella, että $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$, mistä edelleen seuraa, että $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ pitää myös kompleksiluvuille paikkansa. Myös kolmioepäyhtälö



Kuva 5.1 Kompleksilukujen graafinen esitys. Kuviossa näkyvän nuolen pituus kuvaa kompleksiluvun $1 + 2i$ itseisarvoa ja θ sen vaihekulmaa. Vaaka-akselia kutsutaan *reaaliakseliksi* ja pystyakselia *imaginaariakseliksi*. Reaaliakselilla olevat luvut ovat reaalisia, kun taas imarinääriakselin lukuja kutsutaan *puhtaiksi* imaginaariluvuiksi. Liittoluku saadaan peilaamalla reaaliakselin suhteen ja vastaluku origon suhteen.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

pätee kompleksiluvuille, vaikka sitä ei tässä yhteydessä todistetaakaan.

Kompleksiluku $z = x + yi$ voidaan esittää paitsi reaalilukuparina (x, y) , myös antamalla pisteen (x, y) etäisyys origosta (mikä on siis yhtä kuin $|z|$, kompleksiluvun z itseisarvo) sekä origon ja pisteen (x, y) kautta kulkevan suoran ja reaaliakselin välinen kulma θ (ns. *vaihekulma*) (Kuva 5.1). Tästä esityksestä käytetään nimeä *polaariesitys* tai *napakoordinaattiesitys*. Kompleksiluvun esitystä muodossa $z = x + iy$ kutsutaan *karteesiseksi* tai *xy-esitykseksi*.

Huomautus 30 (Polaariesityksen etsiminen). Kompleksiluvun karteesisesta esityksestä $z = x + yi$ saadaan polaariesitys seuraavasti: Itseisarvon laskeminen määritelmän 35 mukaan suoraviivaisesti: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tämän lisäksi alkeistrigonometrian mukaan $\tan \theta = \frac{y}{x}$ (kts. kuva 5.1), joten pääteltäväksi jää θ . Määritelmän mukaan nimittäin funktion arctan arvot ovat aina välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, mutta selvästikin kompleksilukujen vaihekulmia on olemassa myös tämän välin ulkopuolella. Tämä tulee ymmärrettäväksi siten, että tangenttifunktio saa samat arvot kulman π välein: $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Vaihekulman θ valinta tehdään seuraavasti:

1. Tapauksessa $x = 0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta = \frac{\pi}{2}$, jos $y > 0$, ja $\theta = -\frac{\pi}{2}$, jos $y < 0$.
2. Tapauksessa $x > 0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, ja
3. Tapauksessa $x < 0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$.

Reaalilukujen ($y = 0$) vaihekulmaksi voidaan siis edellämainitun perusteella aina valita 0 (positiiviset reaaliluvut) tai π (negatiiviset reaaliluvut).

On kuitenkin huomattava, että kompleksiluvun vaihekulma *ei ole koskaan yksikäsitteinen*, sillä siihen voidaan lisätä tai siitä vähentää niin monta täyden ympyrän (2π) monikertaa kuin halutaan.

Esimerkki 31. Vaihekulman $-\frac{\pi}{2}$ sijaan voidaan yhtä hyvin valita vaihekulma $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$. Piirrä kuva ja havaitse itse!

Esimerkki 32. Kuvan 5.1 tilanteessa $z = 1 + 2i$, joten $|z|^2 = 1^2 + 2^2$, ja siis $|z| = \sqrt{5}$. Vaihekulma θ on yhtälön $\tan \theta = \frac{2}{1} = 2$ ratkaisu, ja tälle saadaan likiarvo $\theta = 1,10715 \dots$ (radiaaneina).

Huomautus 31 (Polaarimuodosta karteesiseen). Jos $r = |z|$ on kompleksiluvun z itseisarvo ja θ sen vaihekulma, voidaan alkeistrigonometrian perusteella (katso kuva 5.1) kirjoittaa $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, joten kompleksiluku $z = x + yi$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta.$$

Näin saadusta muodosta voidaan lisäksi huomata, että

$$|z| = |r(\cos \theta + i \sin \theta)| = \underbrace{|r|}_{|z|} |\cos \theta + i \sin \theta|,$$

ja jos $z \neq 0$, nähdään välittömästi että

$$|\cos \theta + i \sin \theta| = 1,$$

mikä tarkoittaa sitä, että kompleksiluku $\cos \theta + i \sin \theta$ on yksikköympyrällä.

Näin saatu esitys ei kuitenkaan ole muotoa jossa kompleksilukujen polaariesitys yleensä kirjoitetaan. Yleensä käytetään vielä *Eulerin kaavaa* (vaihtoehtoinen nimitys: *Eulerin identiteetti*).

Lause 13 (Eulerin kaava). $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

(kaavassa e on neperin luku, kaava määrittelee e -kantaisen potenssin ns. pääarvon).

Todistus. Perustelu Eulerin kaavalle esitetään kurssikokonaisuuden myöhemmässä osassa, sarjakehitelmien yhteydessä.

Huomautus 32. Trigonometrinen funktioiden yhteenlaskukaavoista seuraa, että kaava

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (5.1)$$

pätee, vaikka eksponentit ovat imaginaarilukuja. Itse asiassa olisi mahdollista valita toisenlainen lähestymistapa: kaava (5.1) on mahdollista todistaa käyttämättä trigonometrinen funktioiden yhteenlaskukaavoja, jotka puolestaan voitaisiin johtaa kaavasta (5.1).

Taustatietoa

Leonhard Euler (1707–1783) oli 1700-luvun merkittävin matemaatikko ja lienee kaikkien aikojen tuottelias matemaatikko julkaisujen määrän suhteen. Hänen kaikki työnsä voitaneen esittää n. 80:ssä kirjassa, mutta nykyisin, yli 230 vuotta Eulerin kuoleman jälkeen vuonna 1911 aloitettu työ on vielä kesken ja vasta 76 kokoomateosta on julkaistu Sveitsin tiedeakatemian rahoittamassa Opera Omnia-sarjassa. Euler syntyi Baselissa, mutta toimi suurimman osan urastaan professorina Pietarissa ja Berliinissä.

(kuva: Wikimedia Commons)

Eulerin kaavaa käyttäen voidaan kompleksiluvun polaari- eli napakoordinaattiesitys kirjoittaa seuraavaan muotoon.

Lause 14 (Eksponenttimuotoinen polaariesitys). Jos kompleksiluvun z itseisarvo on r ja vaihekulma θ , niin

$$z = re^{i\theta}.$$

Esimerkki 33. Luvun $z = 1 - i\sqrt{3}$ itseisarvo on $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Vaihekulma θ toteuttaa yhtälön $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$, joten voidaan valita $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (yhtä hyvin voitaisiin valita $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$). Tällöin siis

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Polaariesitys antaa kompleksilukujen tulolle selkeän tulkinnan: Olkoon $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$. Tällöin

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

mikä siis merkitsee sitä, että

tulon $z_1 z_2$ itseisarvo on kompleksilukujen z_1 ja z_2 itseisarvojen tulo, ja että tulon $z_1 z_2$ vaihekulma on kompleksilukujen z_1 ja z_2 vaihekulmien summa.

Huomautus 33. Koska $\sin \pi = 0$ ja $\cos \pi = -1$, seuraa Eulerin kaavasta yhtälö

$$e^{i\pi} = -1,$$

mitä pidetään yhtenä informatiivisimmista klassisen matematiikan kaavoista: siinä yhdistyvät merkittävät luvut e , π ja i hyvin yksinkertaisella tavalla. Selvitä (harjoitustehtävä) mitä ovat luvut $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ja $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ilmoitettuna reaali- ja imaginaariosan avulla.

Toinen kompleksilukujen yhteydessä usein esiintyvä kaava on ns. de Moivre'n kaava, jota ei kuitenkaan tällä kurssilla paljon käytetä. Se luo kuitenkin mielenkiintoisen kytköksen trigonometriaan.

Lause 15 (de Moivre'n kaava). $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Todistus. Kaavasta (5.1) seuraa (miten?), että kaikille kokonaisluville n pätee $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Tällöin Eulerin kaavan perusteella saadaan

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Muistamalla Eulerin kaava saadaan helposti monia trigonometrian kaavoja.

Esimerkki 34. $e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$, mutta toisaalta

$$e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta.$$

Yhdistämällä näin saadut esitykset huomataan, että $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ja $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$.

Muistutetaan lopuksi yksinkertaisesta mutta tärkeästä tosiasiasta, jolla on merkittäviä seurauksia mm. kompleksilukujen logaritmisiteelle.

Huomautus 34. Koska kompleksiluvun vaihekulma ei ole yksikäsitteinen, ei myöskään eksponenttimuotoinen polaariesitys ole yksikäsitteinen, vaan

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \cos(\theta + n \cdot 2\pi) + i \sin(\theta + n \cdot 2\pi) = e^{i(\theta + n \cdot 2\pi)},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Edellisen yhtälön perusteella $e^{n \cdot 2\pi i} = 1$ aina kun n on kokonaisluku.

5.3 Kompleksinen eksponenttifunktio ja logaritmi

Kompleksisen, e -kantaisen eksponenttifunktion lähtökohtana toimii luonnollisesti Eulerin kaava.

Määritelmä 36 (Kompleksinen eksponenttifunktio). Olkoon $z = x + yi$. Tällöin määritellään

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Esimerkki 35.

$$e^{\ln 2 - \frac{\pi}{2}i} = e^{\ln 2} e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = -2i.$$

Edellisestä määritelmästä seuraa, että kompleksinen eksponenttifunktio toteuttaa reaalialueella tunnetun yhtälön $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, mutta muiden vastaavanlaisten kaavojen suhteen tulee olla huolellinen, kuten jatkossa tullaan näkemään. Huomautuksesta 34 seuraa suoraan, että jos $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$e^{z+n \cdot 2\pi i} = e^z e^{n \cdot 2\pi i} = e^z,$$

mikä merkitsee sitä, että kompleksinen eksponenttifunktio ei ole injektio, vaan $2\pi i$ -jaksoinen funktio, joka saa saman arvon äärettömän monella kompleksiluvulla. Tästä seuraa, että kompleksilukujen eksponenttifunktiolla ei voi olla käänteisfunktioita, vaan että *kompleksinen logaritmi* on välttämättä reaatio.

Suoraviivaisimman tien kompleksisen logaritmin määrittelyyn tarjoaa polaariesitys: Jos $z = |z| e^{i\theta}$, voidaan kompleksiluku z kirjoittaa vaihekulman monikäsitteisyyden vuoksi äärettömän monella eri tavalla:

$$z = |z| e^{i(\theta + n \cdot 2\pi)},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Nämä esitysasut antavat aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 37 (Kompleksinen logaritmi). Kompleksinen logaritmi $\text{Log } z$ on relaatio $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, joka liittää lukuun $z = |z|e^{i\theta}$ kaikki arvot

$$\text{Log } z = \{\ln |z| + i(\theta + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 36. Lasketaan luvun -2 logaritmin arvot. Tätä varten etsitään luvun -2 polaariesitys: $-2 = 2e^{\pi i}$, mutta on otettava huomioon, että vaihekulmaan voidaan lisätä mikä hyvänsä 2π :n monikerta, jolloin siis $-2 = 2e^{i(\pi + n \cdot 2\pi)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin siis kaikki logaritmin $\text{Log}(-2)$ arvot ovat

$$\text{Log}(-2) = \{\ln 2 + i(\pi + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 37. Lasketaan luvun i logaritmin arvot. Tätä varten käytetään polaariesitystä: $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen

$$\text{Log } i = \{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Logaritmin monikäsitteisyyden poistamiseksi voidaan ottaa käyttöön seuraava käsite:

Määritelmä 38. Logaritmin *päähaara* $\overline{\text{Log}}$ on se logaritmin

$$\text{Log } z = \{\ln |z| + i(\theta + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

arvo

$$\overline{\text{Log}} z = \ln |z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Esimerkki 38. $\overline{\text{Log}}(-2) = \ln 2 + \pi i$ ja $\overline{\text{Log}} i = i\frac{\pi}{2}$.

5.4 Kompleksinen potenssinkerotus

Potenssiinkerotus, jossa sekä kantaluku että eksponentti voivat olla kompleksilukuja määritellään logaritmi- ja eksponenttifunktion avulla. Koska reaaliarvoille $a \neq 0$ ja b pätee

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a},$$

käytetään tätä lähtökohtana kompleksista potenssia määriteltäessä. Haittapuolena kompleksilukujen yhteydessä on tietenkin logaritmin monikäsitteisyys, mutta osoittautuu, että joissakin tapauksissa eksponenttifunktion epäinjektiivisyys poistaa monikäsitteisyyttä jonkin verran. Lähtökohtaisesti kuitenkin hyväksytään, että kompleksinen potenssiinkerotus $(a, b) \mapsto a^b$ ei ole funktio, vaan relaatio.

Määritelmä 39. Olkoon $a = re^{i\theta}$ luvun a polaariesitys. Kompleksisen potenssiinkerotuksen kaikki arvot ovat

$$a^b = e^{b \text{Log } a} = \{e^{b(\ln r + i(\theta + n \cdot 2\pi))} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Esimerkki 39. Lasketaan potenssin i^i kaikki arvot. Aiemman esimerkin mukaan logaritmin $\text{Log } i$ kaikki arvot ovat

$$\text{Log } i = \{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

joten

$$i \log i = \left\{ -\frac{\pi}{2} - n \cdot 2\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tällöin siis

$$i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i} = \{e^{-\frac{\pi}{2} - n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 40. Lasketaan potenssin 3^2 kaikki arvot.

$$3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3},$$

joten on siis selvitettävä kaikki logaritmin $\operatorname{Log} 3$ arvot. Luvun 3 polaariesitys on $3 = 3e^{i \cdot 0} = 3e^{n \cdot 2\pi i}$, missä $n \in \mathbb{Z}$, mistä saadaan

$$\operatorname{Log} 3 = \{\ln 3 + n \cdot 2\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Näin ollen potenssin 3^2 kaikki arvot ovat

$$\{e^{2 \ln 3 + 4n\pi i} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\ln 3^2} e^{4n\pi i} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3^2\} = \{9\}.$$

Tässä siis eksponenttifunktio kumoaa logaritmifunktion tuottaman monikäsitteisyyden. On helppo huomata, että näin tapahtuu aina, kun eksponentti on kokonaisluku, jolloin potenssi voidaan aina määritellä toistettuna kertolaskuna.

Esimerkki 41. Lasketaan kaikki potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ arvot.

$$8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8},$$

joten on selvitettävä kaikki $\operatorname{Log} 8$:n arvot. $8 = 8e^{n \cdot 2\pi i}$, mistä

$$\operatorname{Log} 8 = \{\ln 8 + n \cdot 2\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ja potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ kaikki arvot ovat

$$\{e^{\frac{1}{3}(\ln 8 + n \cdot 2\pi i)} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{1}{3} \ln 8} e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nyt tulee vielä selvittää, mitä arvoja $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}}$ saa, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jaetaan tätä varten tarkastelu kolmeen osaan: 1) $n = 3k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot 3k \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} = 1$. 2) $n = 3k + 1$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot (3k+1) \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. 3) $n = 3k + 2$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot (3k+2) \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Näin ollen kaikki potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ arvot ovat

$$\{2, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, 2e^{\frac{4\pi i}{3}}\},$$

jotka voidaan vielä Eulerin kaavan avulla kirjoittaa muotoon

$$\{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

Tämä on sopusuunnassa sen kanssa, että mikä hyvänsä näistä luvuista potenssiin kolme korotettuna antaa luvun 8.

Tässä esimerkissä eksponenttifunktio ei kumo kokonaan logaritmin tuottamaa monikäsitteisyyttä, sillä eksponentilla on nimittäjä 3.

Edellisissä esimerkeissä havaitut seikat on mahdollista yleistää suoraviivaisesti: Koska kompleksisen potenssin määritelmän (määritelmä 39) mukaan kaikki arvot ovat muotoa

$$e^{b(\ln r + i(\theta + n \cdot 2\pi))} = e^{b \ln r + b\theta i} e^{b \cdot n \cdot 2\pi i},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$, voidaan toimia kuten edellisissä esimerkeissä ja todeta seuraava tulos.

Lause 16.

- Jos $b \in \mathbb{Z}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:

$$a^b = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ kpl}}$$

- Jos $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on supistetussa muodossa, on kompleksisella potenssilla a^b q eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{q}}$, $n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.
- Jos $b \notin \mathbb{Q}$, on kompleksisella potenssilla a^b äärettömän monta eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{b \cdot n \cdot 2\pi i}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus 35. Kokonaislukueksponentin $b = n$ kannalta polaarimuoto voi toisinaan olla käyttökelpoinen:

$$z^b = (|z| e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta},$$

mikä siis merkitsee sitä, että itseisarvo korotetaan potenssiin n ja vaihekulma kerrotaan luvulla n .

Esimerkki 42. Lasketaan $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))^{105}$. Tätä varten selvitetään ensin polaariesitys: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, josta $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))^{105} = e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 105} = e^{i\frac{\pi}{4} \cdot (13 \cdot 8 + 1)} = e^{13 \cdot 2\pi i} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Aiemmat määritelmät johtavat myös siihen, että n :s juuri kompleksiluvusta saadaan juurtamalla itseisarvo (reaalinen juuri) ja *jakamalla* vaihekulma luvulla n . Tällöin on vain huomioitava, että kompleksiluvulla on ääretön määrä esitysmuotoja (vaihekulmaan voidaan aina lisätä 2π :n monikerä).

Esimerkki 43. Koska $-1 = e^{\pi i} = e^{3\pi i}$, ovat luvun -1 kaikki toiset juuret $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ja $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$.

Esimerkki 44. Luku 1 voidaan kirjoittaa $1 = e^{0 \cdot i} = e^{2\pi i} = e^{2 \cdot \pi i} = e^{3 \cdot 2\pi i} = \dots$, joten luvun 1 n :nnet juuret ovat

$$\{e^{0 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = 1, e^{1 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \dots, e^{(n-1) \cdot \frac{2\pi i}{n}}\}.$$

Määritelmä 40. Yllä olevia lukuja kutsutaan n :nsiksi ykkösenjuuriksi.

Nimensä mukaan n :nnet ykkösenjuuret potenssiin n korotettuna tuottavat ykkösen, mikä nähdään suoraan lausekkeista. Vaihekulmista nähdään lisäksi, että ykkösenjuuret sijaitsevat tasavälein yksikköympyrällä. Lisäksi 1 on aina niiden joukossa (kts. kuva 5.4). Vielä yksi merkittävä huomio on, että kaikki n :nnet ykkösenjuuret saadaan ns. *primitiivisen ykkösenjuuren* potensseina.

Kompleksista potenssia voidaan myös rajoittaa samoin kuin logaritmiakin:

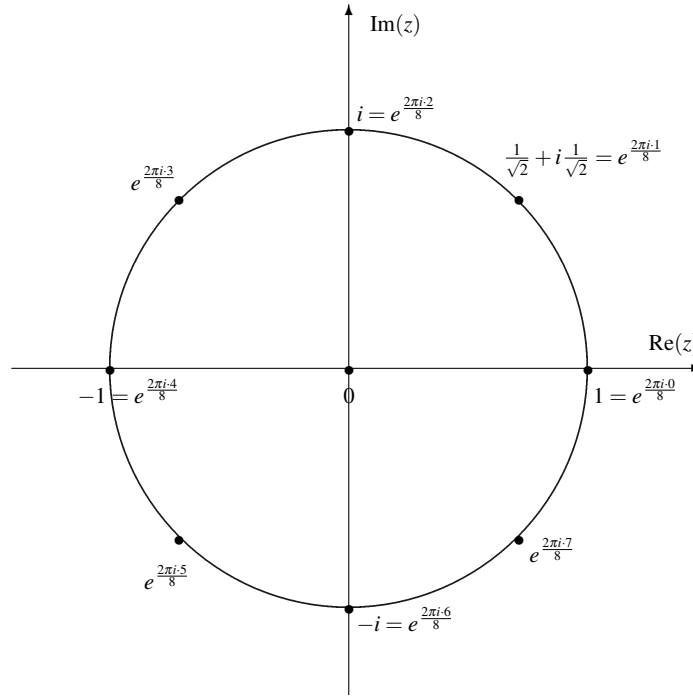
Määritelmä 41. Kompleksisen potenssin *pääarvo* määritellään käyttäen logaritmin päähaaraa:

$$a^b = e^{b \overline{\text{Log}} a}.$$

Kompleksisen potenssin pääarvolle ei ole vakiintunutta merkintää, mutta yleensä kompleksisesta potenssista puhuttaessa tarkoitetaan sen pääarvoa, ellei toisin ilmoiteta.

Esimerkki 45. Koska $\overline{\text{Log}} i = i\frac{\pi}{2}$, on potenssin i^i pääarvo

$$e^{\overline{\text{Log}} i^i} = e^{i \overline{\text{Log}} i} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$



Kuva 5.2 Kahdeksannet ykkösenjuuret ovat kaikki yhtälön $z^8 = 1$ ratkaisut eli polynomin $z^8 - 1$ nollakohdat.

Esimerkki 46. Kompleksilukujen neliöjuuret voidaan aina löytää xy -muodossa seuraavasti: Suoralla laskulla todetaan, että $(x+yi)^2 = (x^2-y^2) + 2xy \cdot i$, joten luvun $a+bi$ neliöjuuren $x+yi$ pitää toteuttaa $a = x^2 - y^2$ sekä $b = 2xy$. Ratkaisemalla x ja y yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

saadaan luvun $a+bi$ neliöjuuret muodossa $x+yi$.

5.5 Kompleksilukujen trigonometriset funktiot

Trigonometrinen funktioiden laajentaminen kompleksialueelle perustuu Eulerin kaavaan

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Jos tähän sijoitetaan θ :n paikalle $-\theta$, saadaan

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

Laskemalla yhteen näin saadut kaksi yhtälöä saadaan $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, kun taas vähennyslasku tuottaa $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$. Koska eksponenttifunktio on jo määritelty kaikille kompleksiluvuille, voidaan asettaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 42 (Sini ja kosini kompleksiluvuille).

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{ja} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Muut trigonometriset funktiot kuten tangentti määritellään samoin kuin reaali-alueille, esim. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Koska kompleksinen eksponenttifunktio on yksikäsitteinen, samoin ovat sini ja kosi-

ni. Lisäksi on huomattava, että eksponenttifunktion jaksosta $2\pi i$ seuraa sinille ja kosinille jakso 2π . Tunnettu trigonometrinen identiteetti $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ voidaan huomata oikeaksi jo heti määritelmän perusteella. Trigonometrian summakaavat puolestaan voidaan johtaa eksponenttifunktion ominaisuudesta $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Esimerkki 47.

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^1) \approx 1,54,$$

joten trigonometristen funktioiden arvo kompleksialueella *ei rajoitu* välille $[-1, 1]$. Itse asiassa trigonometristen funktioiden arvo ei välttämättä ole reaalinen, kuten helposti nähdään laskemalla $\sin i$.

5.6 Algebran peruslause

Kun kompleksiluvut on otettu käyttöön, voidaan tietenkin kysyä olisiko syytä laajentaa lukujoukkoja vielä tästäkin. Kompleksilukuja koskevan osion alussa esitetty tarve ainakin poistuu seuraavan tuloksen myötä.

Lause 17 (Algebran peruslause). *Olkoon $P(z)$ mikä hyvänsä polynomi, joka ei ole vakio ja jonka kertoimet ovat kompleksilukuja. Tällöin polynomiyhtälöllä $P(z) = 0$ on aina olemassa ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$.*

Todistus. Vaatii esitietoja, jotka eivät kuulu tähän kurssiin ja on muutenkin mutkikas, sivuutetaan.

Edellinen tulos kertoo, että kompleksiluvut muodostavat ns. *algebrallisesti suljetun kunnan*, jossa kaikilla polynomeilla on nollakohta, eikä siksi polynomiyhtälöiden ratkaisun kannalta tarvitse laajentaa lukualuetta enempää.

Tästä huolimatta voidaan kuitenkin ajatella kompleksilukujen kuntaa laajennettavaksi edelleen. Yksi mahdollinen laajennustapa nousee esille kompleksilukujen määritelmästä: Kompleksiluvuthan ovat oleellisesti ottaen reaalityyppisiä, joten voitaisiin otaksua, että laajempi lukujoukko saataisiin tarkastelemalla reaalityyppisyyttä, -neliköitä, jne. ja määrittelemällä näille yhteen- ja kertolaskut siten, että reaalityyppisten tutut laskusäännöt (vaihdannaisuus, liitännäisyys, käänteisluvut, jne. kuten on kunta-aksioomissa määritelty) säilyisivät.

Tarkempi algebran tutkimus osoittaa kuitenkin, että tämä ei ole mahdollista. Käy ilmi, että kaikki tällaiset kolmikieliset, nelikieliset, jne. perustuvat laajennukset olisivat reaalityyppisten kunnan *algebrallisia* laajennuksia, ja algebran peruslauseesta seuraa, että kompleksilukujen kunnalla ei ole algebrallisia laajennuksia.

Huomautus 36. Algebran peruslause takaa, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla $P(z)$ on olemassa nollakohta $c \in \mathbb{C}$, ei sitä, että nollakohdat saataisiin polynomin kertoimista algebrallisesti. Korkeintaan astetta 4 oleville polynomeille nollakohdat kuitenkin voidaan löytää polynomin kertoimien algebrallisina funktioina, toisin sanoen korkeintaan astetta 4 oleville polynomeille on olemassa *algebrallinen* ratkaisukaava. Viidettä tai sitä korkeampaa astetta oleville polynomeille ei ole yleistä algebrallista ratkaisukaavaa, mutta minkä hyvänsä polynomin nollakohdille voidaan aina löytää niin tarkat likiarvot kuin halutaan.

Taustatietoa



Girolamo Cardano (1501–1576) oli italialainen lääkäri ja matemaatikko, jonka julkistamat ratkaisukaavat 3. ja 4. asteen yhtälöille johtivat kompleksilukujen yleiseen käyttöönottoon. Cardano ei kuitenkaan keksinyt kaavoja itse, vaan oli saanut tietoonsa 3. asteen ratkaisukaavat, jotka Niccoló Tartaglia (n. 1499–1557) ja Scipio del Ferro (n. 1465–1526) olivat kehittäneet toisistaan tietämättä aiemmin. Cardano kehitti 4. asteen yhtälön ratkaisukaavan yhdessä oppilaansa Lodovico Ferrarin (1522–1565) kanssa ja julkisti kaikki ratkaisukaavat teoksessaan *Ars magna* (1554). Siksi mainitut kaavat tunnetaan nykyisin *Cardanon kaavoina*

(kuva: Wikimedia Commons)

Lause 18. Jos polynomilla $P(z)$ on nollakohta c_1 , niin $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - c_1$.

Todistus. Jakolaskulla saadaan $P(z) = (z - c_1)P_1(z) + r(z)$, missä $P_1(z)$ on osamäärä ja $r(z)$ jakojäännös. Koska jakojäännöksen $r(z)$ aste on pienempi kuin jakajan $z - c$ aste, on $r(z)$ välttämättä vakiopolynomi, merkitään $r(z) = r$. Nyt siis $P(z) = (z - c_1)P_1(z) + r$, ja sijoittamalla c_1 saadaan $0 = P(c_1) = (c_1 - c_1)P_1(z_0) + r = r$, siis $r = 0$ ja $P(z) = (z - c_1)P_1(z)$.

Huomautus 37. Huomaa, että vastakkainen tulos pätee ilman muuta: jos $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - c_1$, on sillä nollakohta c_1 . Tämä seuraa suoraan sijoittamalla c_1 hajotelmaan $P(z) = (z - c_1)P_1(z)$.

Huomautus 38. Olkoon $P_1(z)$ edellisen lauseen osamäärä. Se on polynomi, jonka aste on yhtä pienempi kuin $P(z)$:n aste, ja jos se ei ole vakio, on sillä algebran peruslauseen nojalla nollakohta c_2 . Edelleen, lauseen 18 nojalla $P_1(z) = (z - c_2)P_2(z)$, missä $P_2(z)$:n aste on yhtä pienempi kuin $P_1(z)$:n. Tällöin siis $P(z) = (z - c_1)(z - c_2)P_2(z)$, ja samaa menettelyä voidaan soveltaa edelleen polynomiin $P_2(z)$, ellei se ole vakio (siis astetta 0). Lopulta päädytään lausekkeeseen $P(z) = (z - c_1)(z - c_1) \cdot \dots \cdot (z - c_d)a$, missä $a \in \mathbb{C}$ on vakio polynomi ja d polynomin $P(z)$ aste.

Hajotelma

$$P(z) = a(z - c_1)(z - c_2) \cdot \dots \cdot (z - c_d) \quad (5.2)$$

kertoo sen, että *jokainen polynomi jakautuu kompleksilukujen joukossa ensimmäisen asteen tekijöihin*. Vastaava ei pidä paikkansa reaalityyppisille: jos esimerkiksi polynomilla $x^2 + 1$ olisi reaalin ensimmäisen asteen tekijä, olisi sillä myös huomautuksen 37 mukaan reaalin nollakohta.

Seuraus 4. Astetta $d \geq 1$ olevalla polynomilla $P(z)$, on korkeintaan d nollakohtaa.

Todistus. Hajotelmassa (5.2) luvut $c_1, c_2, \dots, c_d$ ovat kaikki $P(z)$:n nollakohdat. Koska d on polynomin $P(z)$ aste, on nollakohtia korkeintaan d .

Huomautus 39. Kertomalla tulo (5.2) auki nähdään helposti, että a on polynomin $p(z)$ korkeimman asteen termin vakiokerroin.

Milloin sitten astetta d olevalla polynomilla voi olla *vähemmän* kuin d nollakohtaa? Tarkastele-malla hajotelmaa (5.2) huomataan, että näin voi käydä vain silloin, kun jotkin luvuista $c_1, c_2, \dots, c_d$ ovat keskenään yhtäsuuria. Esimerkkinä käy toisen asteen polynomi $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)(z - 1)$, jolla on vain yksi nollakohta $z = 1$. Tämän kaltaisessa tapauksessa sanotaan kuitenkin, että $z = 1$ on polynomin $z^2 - 2z + 1$ *kaksinkertainen* nollakohta. Vastaavasti määritellään kolminkertainen nollakohta, jne.

Kompleksiluvut annetaan **Matlabille** seuraavan esimerkin mukaisesti:

```
>> (5+3i)/(1+2i)
```

```
ans =
```

```
11/5 - 7/5i
```

Vastaus siis tulkitaan siten, että $\frac{5+3i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$.

Kompleksikonjugaatin tuottaa `conj(z)` ja itseisarvon `abs(z)`. Vaihekulma puolestaan saadaan komennolla `angle(z)`. Reaali- ja imaginaariosat saadaan eroteltua komennoilla `real(z)` ja `imag(z)`.

Selitä vastaus seuraavaan syötteeseen:

```
>> imag(log(-1))
```

```
ans =
```

```
3.1416
```

```
>>
```

Luvun oleellisia asioita:

- Imaginaariyksikkö, kompleksilukujen summa, tulo ja osamäärä.
- Liittoluku.
- Kompleksilukujen itseisarvo ja polaariesitys.
- Eulerin kaava.
- Kompleksilukujen eksponenttifunktio, sini, kosini, potenssi, juuret ja logaritmi; pääarvo.
- Algebran peruslause.

Luku 6

Liite

Tämä liite koostuu edellisinä vuosina käytetystä, mutta nykyversiosta poistetusta materiaalista.

6.1 Päättelyn muotoja

Aiemmassa luvussa mainittiin, että matemaattiset teoriat muodostetaan aksioomista ja peruskäsitteistä lähtien rakentamalla näiden päälle uusia käsitteitä ja loogisesti johtamalla aksioomista muita väitteitä (lauseita). Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti matematiikassa käytettävän päättelyn luonnetta.

Päättelyn eri muodoista voidaan mainita ainakin *deduktiivinen*, *induktiivinen* ja *abduktiivinen* päättely. Deduktiivisessa päättelyssä oletuksista johdetaan *päättelysääntöjä* käyttämällä johtopäätöksiä. Induktiivisessa päättelyssä johdetaan joukosta tapauksia yleinen sääntö, ja abduktiossa taas tyypillisesti tunnetuista säännönmukaisuuksista ja seurauksesta päätellään *mitä on tapahtunut*.

Induktiivinen päättely on tyypillistä luonnontieteille, osalle yhteiskuntatieteistä ja lääketieteelle. Induktiossa päätellään, että sääntö, joka toimii havaittujen tapausten yhteydessä, pätee myös yleisesti ("kaikki joutsenet jotka olemme nähneet ovat valkoisia, siis *kaikki* joutsenet ovat valkoisia"). Induktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa (Australiassa on mustia joutsenia; *Cygnus atratus*), mutta induktiivisen päättelyn epävarmuutta voidaan toisinaan arvioida tilastollisin menetelmin. Erityisen tärkeää induktion epävarmuuden arviointi on lääketieteessä: halutaan, että johtopäätös "lääkkeellä ei ole haittavaikutuksia" pitää paikkansa mahdollisimman suurella todennäköisyydellä, vaikka lääketta on voitu testata vain rajalliseen ihmisjoukkoon.

Abduktiivinen päättely on tunnettua erityisesti salapoliisitarinoista: "Herra X:n nähtiin poistuvan murhapaikalta, kenenkään muun ei nähty poistuvan murhapaikalta, siis herra X on murhaaja". Abduktiivista päättelyä käytetään jossakin määrin yhteiskuntatieteissä ja humanistisissa tieteissä, mutta induktion tavoin abduktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa. Looginen sitovuus tarkoittaa sitä, että premissien (oletusten) ollessa tosia ovat johtopäätökset myös tosia.

Matemaattisten väittämien (lauseiden) todistamiseen käytetään ainoastaan loogisesti sitovaa, deduktiivista päättelyä. Tämänlainen päättely voidaan periaatteessa formalisoida käyttämällä *predikaattilogiikkaa* ja esittelemällä äärellinen määrä päättelysääntöjä, joista voidaan jokaisesta todeta, että oletusten ollessa tosia on myös johtopäätös tosi.

Tällaisen formalismin esittely veisi kuitenkin liiaksi ajallisia resursseja eikä sellaista siksi tällä kurssikokonaisuudella esitetä. Esimerkkinä voidaan kuitenkin mainita seuraava:

Esimerkki 48. Modus ponens on tyypillinen deduktiivisen päättelyn sääntö. Se voidaan esittää kaaviomuodossa

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi},$$

joka tulkitaan siten, että logiikan kaavoista ϕ ja $\phi \rightarrow \psi$ (oletukset eli premissit) voidaan päätellä johtopäätös ψ .

Tämän luvun lopuksi tarkastellaan lyhyesti matemaattisen teorian väitteiden *totuusarvoa*. Aksiomaattis-deduktiivisessa teoriassa teoriaa koskevat väittämät eli lauseet johdetaan loogisesti aksiomista, joten lauseiden totuus palautuu tällöin aksiomien totuuteen ja loogisten päättelysääntöjen pätevyyyteen.

Päättelysääntöjen pätevyydestä puhutaan enemmän seuraavassa luvussa, mutta jo tässä yhteydessä voidaan todeta, että yleensä aksiomien totuusarvo on matemaattisen teorian kehittämisen kannalta täysin yhdentekevä seikka ja matemaattisen teorian lausetta sanotaan todeksi, mikäli se on johdettavissa aksiomista.

On kuitenkin jälleen muistutettava, että matemaattisen teorian aksiomia ei yleensä valita mielivaltaisesti, vaan niiden toivotaan kuvaavan mahdollisimman hyvin teorian objektien ominaisuuksia. Jos esimerkiksi halutaan teorian kuvaavan luonnollisia lukuja, on syytä valita aksiomat siten, että ne eivät ainakaan ole ristiriidassa luonnollisia lukuja koskevan intuition kanssa.

Totuuden käsitteen kannalta matemaattista teoriaa voidaan verrata vaikkapa shakkipeliin: pelin alkuasetelma vastaa aksiomajoukkoa ja sääntöjen mukaiset siirrot päteviä päättelysääntöjä. Kukaan säännönmukaisilla siirroilla saatu asetelma vastaa matemaattisen teorian lausetta ja tällöin matemaattisen teorian yhteydessä usein esiintyvä kysymys ”onko tämä lause tosi?” vastaa shakkipelissä kysymystä ”voidaanko tällainen asetelma saada pelisääntöjä noudattamalla?”

Shakkipelissä ei oteta kantaa siihen kysymykseen, onko pelin alkuasetelma jollakin tavalla ”tosi”, ja sama pätee myös matemaattiseen teoriaan. Oleellista on se, mitä aksiomista voidaan loogisesti johtaa.

*Esimerkki 49. Syllogismi on deduktion muoto, jossa kahdesta premissistä (suomeksi lähtökoh-
ta) (pääpremissi ja alipremissi) päätellään johtopäätös.*

Jokainen ihminen on kuolevainen (pääpremissi)	Sokrates on ihminen (alipremissi)
Sokrates on kuolevainen (johtopäätös)	

Harjoitustehtävä: Mitä voidaan ylläolevasta syllogismista sanoa a) jos pääpremissi poistetaan b) jos johtopäätös ei ole tosi?

Taustatietoa



Aristoteles (Ἀριστοτέλης, 384 eKr–322 eKr) oli kreikkalainen filosofi, jonka katsotaan Sokrateen ja Platonin ohella vaikuttaneen eniten länsimaiseen ajatteluun. Aristoteles käsitteli lähes kaikkea inhimillisen toiminnan piiriin kuuluvaa, luonnontieteistä valtiotieteisiin ja taiteisiin. Aristoteles analysoi loogista päättelyä ja kehitti syllogistisen logiikan. Aristotelesta sanotaan usein logiikan isäksi.

(kuva: Wikimedia Commons)