

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 1, 22.1.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Sata metriä pitkä vaijeri katkeaa. Mikä on todennäköisyys sille, että jäljelle jää vähintään 30 metriä pitkä vaijerinpätkä, kun kaikki katkeamiskohdat ovat yhtä todennäköisiä?

Mallivastaus: Vaijerin katketessa mistä kohdasta hyvänsä jäljelle jää vähintään 50 metriä pitkä pätkä. Näin ollen suotuisia katkeamiskohtia ovat kaikki kohdat, ja kysytty todennäköisyys on siis 1.

2. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna silmäluku, joka on parillinen ja ainakin 8?

Mallivastaus: Suotuisia tapauksia ovat $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$. Näitä on 9 kpl, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

3. Ympyränmuotoisen tikkataulun halkaisija on 40 cm ja keskellä olevan napakymppin halkaisija 2 cm. Millä todennäköisyydellä tikka osuu napakymppiin, kun oletetaan että tikka osuu taulun kaikkiin kohtiin yhtä todennäköisesti ja taulun ulkopuolelle osuneet heitot hylätään tarkastelusta? Ohje: geometrinen todennäköisyys, luento 13.1.

Mallivastaus: Napakymppin pinta-ala on $\pi \cdot 1^2 \text{ cm}^2$, ja koko tikkataulun pinta-ala $\pi \cdot 20^2 \text{ cm}^2$. Näin ollen kysytty todennäköisyys on $\frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{400} = 0,25\%$

4. Urnassa on 8 numeroitua palloa. Niistä valitaan palauttaen 5. Kuinka monta erilaista valintaa on olemassa, kun valitsemisjärjestys huomioidaan?

Mallivastaus: $8^5 = 32768$

5. Urnassa on 8 numeroitua palloa. Niistä valitaan palauttaen 5. Kuinka monta erilaista valintaa on olemassa, kun valitsemisjärjestystä ei huomioida?

Mallivastaus: $\binom{8+5-1}{5} = 792$

6. Urnassa on 8 numeroitua palloa. Niistä valitaan palauttamatta 5. Kuinka monta erilaista valintaa on olemassa, kun valitsemisjärjestys huomioidaan?

Mallivastaus: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

7. Urnassa on 8 numeroitua palloa. Niistä valitaan palauttamatta 5. Kuinka monta erilaista valintaa on olemassa, kun valitsemisjärjestystä ei huomioida?

Mallivastaus: $\binom{8}{5} = 56$

8. Satunnaisbittigeneraattori tuottaa riippumattomasti nollan todennäköisyydellä $p \in (0, 1)$ ja ykkösen todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Pyritään laatimaan menetelmä, joka tuottaa nollan todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Analysoi, toimiiko seuraava: Kahden peräkkäisen bitin jono hylätään, jos se on 00 tai 11, ja hyväksytään muutoin. Hyväksytyistä jonoista 01 tulkitaan nollaksi ja 10 ykköseksi. Ohje: Mikä on ehdollinen todennäköisyys jonolle 01, sillä ehdolla, että on saatu toinen jonoista 01 tai 10?

Mallivastaus: Todennäköisyys saada 0 tai 1 ovat riippumattomat, on $\mathbb{P}(01) = pq$ ja $\mathbb{P}(10) = qp$. Koska jonoja 01 ja 10 ei voi saada yhtä aikaa, ovat nämä

tapaukset toisensa poissulkevat, ja siksi $\mathbb{P}(01 \cup 10) = \mathbb{P}(01) + \mathbb{P}(10) = 2pq$. Näin ollen kysytty ehdollinen todennäköisyys on

$$\mathbb{P}(01 \mid 01 \cup 10) = \frac{\mathbb{P}(01)}{\mathbb{P}(01 \cup 10)} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2}.$$

9. Kahden nopan heitossa hylätään ne, joissa silmälukujen summa on suurempi kuin 11 ja heitetään uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että silmälukujen summana saadaan 3? entä 6? entä 10?

Mallivastaus: Silmälukujen summa on suurempi kuin 11 vain tapauksessa $(6, 6)$, joten suotuisia tapauksia on $36 - 1 = 35$. Todennäköisyys sille, että ei tarvitse heittää uudelleen on siis $\frac{35}{36}$.

Silmälukujen summa on 3 tapauksissa $\{(1, 2), (2, 1)\}$, 6 tapauksissa $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ ja 10 tapauksissa $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$. Näin ollen todennäköisyydet saada kahden nopan heitossa 3, 6 ja 10 ovat $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, $\frac{5}{36}$, ja $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Tehtävässä kysytyt todennäköisyydet saadaan jakamalla nämä luvulla $\frac{35}{36}$, jolloin saadaan $\frac{2}{35} = 0,057\dots$, $\frac{1}{7} = 0,14\dots$ ja $\frac{3}{35} = 0,0857\dots$