

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 3, 5.2.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Olkoon X silmälukujen summa kahden toisistaan riippumattoman nopan heitossa. Laske $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ ja $\text{Var}(X)$.

Ohje: Esitä vastauksessa periaate, miten kysytyt arvot lasketaan. Lausekkeiden numeeriset arvot ovat työläitä käsin laskettaviksi, ja niiden määrittämisessä voi käyttää matematiikkaohjelmistoa.

2. Painotetulla kolikolla saadaan kruuna 60% ja klaava 40% todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys että saadaan ainakin kuusi kruunaa, kun kolikkoa heitetään 8 kertaa?

3. Eräällä asuinalueella 90%:lla kotitalouksista on laajakaistayhteys. Mikä on todennäköisyys sille, että kymmenestä kyselyyn valitusta kotitaloudesta vain seitsemällä on laajakaistayhteys?

4. Pankki kirjaa keskimäärin 30 yritystä maksukyvyttömäksi joka vuosi. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä pankki kirjaa jonkin kuukauden aikana vähintään 4 yritystä maksukyvyttömäksi.

Ohje: Mieti aluksi miten jakauman parametri λ saadaan. Jos vuodessa tehdään keskimäärin 30 kirjausta, kuinka monta tehdään keskimäärin kuukaudessa?

5. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy korkeintaan 100 pmy/100 ml.¹. Määritä Poissonin jakaumaa käyttämällä todennäköisyys sille, että äärimmäisessä juomakelpoisessa tapauksessa (kolibakteereja tasan 100 pmy/100 ml) saadaan 10 ml näyte, jossa kolibakteereja on 14 pmy.

6. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka 5. minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa. Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$ kun ajan yksikkönä käytetään minuuttia. Selvitä mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 7 minuutin päästä?

7. Olkoot parametrit kuten edellisessä tehtävässä. Jos aiempi puhelu saapui 3 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 8 minuutin päästä?

8. Yritys valmistaa sähköhammasharjoja, joiden sähkömoottorin kestoikä on normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 10000$ ja keskihajonnan $\sigma = 2000$ (aikayksikkönä tunti). **Huomautus:** Näppäilyvirhe $\sigma = 200$ on korjattu 31.1. oikeaan muotoon $\sigma = 2000$. Vastauksen voi palauttaa kummalla tahansa lukuarvolla laskettuna, mutta arvon $\sigma = 200$ kanssa saatavat vastaukset ovat vähemmän havainnollisia.

a) Millä todennäköisyydellä moottori kestää yli 12000 tuntia käyttöä?

b) Millä todennäköisyydellä moottori kestää alle 5000 tuntia?

c) Mikä on kesto aika, jonka ylittää vain 1% moottoreista?

Ohje c)-kohtaa varten: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio saadaan muodossa `norminv(p)`.

¹pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

9. Olkoon X normaalijakautuman $N(\mu, \sigma^2)$ mukainen satunnaismuuttuja. Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(|X - \mu| > \sigma)$, $\mathbb{P}(|X - \mu| > 3\sigma)$, ja $\mathbb{P}(|X - \mu| > 5\sigma)$.

Ohje: $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq a) = \mathbb{P}(-a + \mu \leq X < a + \mu)$.