

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 4, 12.2.2026

1. Merkitään klaavaa 1:llä ja kruunaa 2:lle painottamattoman kolikon heitossa. Kun kolikkoa heitetään n kertaa. Olkoon X_i i :nnen heiton tulos (joko 1 tai 2) sekä $\bar{X}_n$ kaikkien heittojen tulosten otoskeskiarvo.

Käytä suurten lukujen lakia selvittääksesi kuinka monta heittoa n tarvitaan, että $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| < 0.01) \geq 0.99$

2. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 200 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 1,5$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,7$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 13000 kirjaa mahtuu hyllyihin.

Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \dots + X_{13000}$. Käytä keskeistä raja-arvolauseetta.

3. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan korkeintaan 140 kertaa silmäluku 6. Arvioi keskeistä raja-arvolauseetta käyttäen tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä, mikäli noppa on painottamaton.

Ohje: Voit esimerkiksi määritellä satunnaismuuttujan X joka saa kaksi arvoa: 0, jos silmäluku on ≤ 5 ja 1, jos silmäluku on 6.

4. Määritä edellisen tehtävän todennäköisyys binomijakaumaa ja sopivaa matematiikkaohjelmaa käyttäen.
5. Populaatiossa A keskipituus on normaalisti jakautunut ja $\mu = 175$ cm. Populaatiosta B valittiin 30 henkilöä, ja todettiin pituuden otoskeskiarvoksi 168 cm sekä otoskeskihajonnaksi $\sigma = 3$ cm. Voidaanko sanoa 95% varmuudella, että populaation B keskipituus on pienempi kuin populaation A ?

Ohje: Aseta nollahypoteesiksi, että populaation B keskipituus on 175 ja käytä t -jakaumaa.

6. Satunnaismuuttuja X saa arvot 1, 2, 3 ja 4 todennäköisyyksillä $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{8}$, Laske entropia $H(X)$ (yksikkönä bitti)
7. Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot ovat joukossa $\{1, 2, 3, 4\}$ ja näillä on seuraavan taulukon mukainen yhteisjakauma:

$y \backslash x$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0

Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(X = i)$ ja $\mathbb{P}(Y = i)$, kun $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ja laske entropiat $H(X)$, $H(Y)$, $H(X | Y)$ sekä $I(X | Y)$. Ohje: Esim. Todennäköisyys sille, että Y saa arvon 1 lasketaan 1. rivin todennäköisyyksien summana (miksi?)

8. Jääkiekkjoukkue voittaa kotona pelatessaan todennäköisyydellä $\frac{3}{5}$, mutta vierasjoukkueena pelatessaan vain todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Pelipaikka on todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ kotihalli ja $\frac{3}{4}$ vieras halli.

Millä todennäköisyydellä joukkue voittaa pelin? Olkoon X satunnaismuuttuja, joka saa arvot {voitto, häviö} ja Y satunnaismuuttuja, joka saa arvot {kotihalli, vierashalli} todennäköisyyksillä $\frac{1}{10}$ ja $\frac{9}{10}$. Laske $I(X | Y)$.

9. Satunnaismuuttuja X saa arvokseen kirjaimia $A, B, \dots, G$ taulukon

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

mukaisilla todennäköisyyksillä. Satunnaismuuttujan arvoista muodostuva jono koodataan bittijonoksi taulukon

A	B	C	D	E	F	G
0	110	111	1000	1001	1010	1011

mukaisesti. Määritä entropia $H(X)$ ja selvitä kuinka pitkä bittijono keskimäärin koodaa yhden kirjaimen.

Voidaanko koodaus bittijonoksi tehdä paremmin, siis siten, että koodaavan bittijonon pituus olisi keskimäärin pienempi? Selvitä lopuksi mitkä satunnaismuuttujan arvot ovat koodattuna bittijonoon 111100101101001101010111100110110. Mistä johtuu, että koodattu kirjainjono löytyy yksikäsitteisesti kun jono luetaan vasemmalta oikealle?