

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko Ω jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq \Omega$. Sanotaan, että *A tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$. Tapaus A tapahtuu, jos esim. saadaan nopanheiton tuloksena 2

Esimerkki

Kahden nopan heitossa $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, silmälukujen summa yli 9: $A = \{(i, j) \in S \mid i + j > 9\}$

Todennäköisyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, on

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Esimerkki

Parillinen silmäluku yhden nopan heitossa $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Summa yli 9 kahden nopan heitossa: $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Geometrinen todennäköisyys

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

missä $\mu(X)$ on joukon X *geometrinen mitta*. Esimerkiksi $\mu([a, b]) = b - a$.

Esimerkki

Metrin mittainen lanka leikataan sokkona kahtia. Millä todennäköisyydellä toinen osista on korkeintaan 20 cm pituinen?

Esimerkki

Linja-auto lähtee pysäkiltä 20 minuutin välein. Millä todennäköisyydellä pysäkillä satunnaiseen aikaan saapunut joutuu odottamaan korkeintaan 5 minuuttia linja-auton lähtöä?

Empiirinen todennäköisyys

Koe toistetaan N kertaa. Jos alkeistapaus s_i tapahtuu f_i kertaa (frekvenssi), sanotaan että alkeistapauksen s_i suhteellinen frekvenssi on $\frac{f_i}{N}$ ja empiirinen todennäköisyys määritellään suhteellisenä frekvenssinä

$$\mathbb{P}(s_i) = \frac{f_i}{N}.$$

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Esimerkki: Suomessa syntyneet lapset

Vuodet	Poikia	Tyttejä	Poikien osuus
2012	30308	29185	50,94380852
2012-13	60166	57461	51,14982104
2012-14	89438	85421	51,14863976
2012-15	117907	112424	51,19024361
2012-16	144719	138426	51,11126808
2012-17	170393	163073	51,09756317
2012-18	195023	186020	51,18136273
2012-19	218209	208447	51,14401298
2012-20	241987	231132	51,14717439
2012-21	267274	255439	51,13207439
2012-22	290234	277430	51,12777981

Subjektiiivinen todennäköisyys

Käyn huomenna kaupassa todennäköisyydellä 0,70

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq \Omega$ ja $B \subseteq \Omega$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$. kaikille $A \subseteq \Omega$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$ jos tapaukset $A_1, A_2, \dots$, ovat toisensa poissulkevat.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Esimerkki

Olkoot $A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{5, 6\}$ (vähintään 5). Tällöin

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Unioni

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) \\ - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap D) \\ - & \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(C \cap D) \\ + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap D) \\ + & \mathbb{P}(A \cap C \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D) \\ - & \mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Järjestetty otanta

Otanta

- Palauttaen: n^k
- Palauttamatta $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1, 2, 3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkiota n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkiota n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkiota voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$