

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Monty Hall Show

Kilpailija saa valita yhden kolmesta ovesta. Kahden oven takana on vuohi, yhden takana auto. Valinnan jälkeen juontaja avaa sellaisen oven, jota kilpailija ei valinnut ja jonka takana on vuohi. Tämän jälkeen kilpailija saa vaihtaa ovea. Kannattaako vaihto jos haluaa auton?

Järjestetty otanta

Otanta

- Palauttaen: n^k
- Palauttamatta $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkioita voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkioita kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1, 2, 3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkiota n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkiota n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkiota voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Palauttamatta: Esimerkki

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7! \cdot 33!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7!} = 18643560$$

Järjestämätön otanta

Palauttaen?

Järjestetty

- Palauttamatta: $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Palauttaen: n^k

Järjestämätön

- Palauttamatta: $\binom{n}{k}$
- Palauttaen $\binom{n+k-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Esimerkki

Jos tiedetään, että nopanheitossa tulos on parillinen, niin nelosen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Jos taas tiedetään, että tulos on pariton, on nelosen todennäköisyys 0.

Määritelmä

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Huomautus

- $0 \leq \mathbb{P}(A \mid B) \leq 1$
- $\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \mid B)$

Esimerkki

Esimerkit 1.18 ja 1.19