

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Muista:

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Huomautus

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Bayesin lause (muoto 1)

Jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A).$$

Muista:

Tapaukset $A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$. Tällöin

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

Kokonaistodennäköisyys

Oletetaan, että $A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat toisensa poissulkevat ja $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Jos $B \subset \Omega$, ovat myös $B \cap A_i$ toisensa poissulkevat ja

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n).$$

Tästä

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i).$$

Erikoistapaus (kokonaistodennäköisyys)

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$$

Esimerkki

Esimerkki 1.20

Määritelmä

Jos

$$\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{ja} \quad A_i \cap A_j = \emptyset,$$

sanotaan, että tapaukset $A_1, \dots, A_n$ muodostavat otosavaruuden Ω *partition*.

Bayesin lause (Muoto 2)

Oletetaan että tapaukset $A_1, \dots, A_n$ muodostavat otosavaruuden partition.

$$\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_k \mid B) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B \mid A_k),$$

josta

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B \mid A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

ja edelleen

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos). Tällöin siis $\mathbb{P}(T) = 0,0002$, $\mathbb{P}(E) = 0,9998$, $\mathbb{P}(P | T) = 0,9999$, $\mathbb{P}(N | T) = 0,0001$, $\mathbb{P}(P | E) = 0,001$ ja $\mathbb{P}(N | E) = 0,999$.

Esimerkki

Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{\mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Koska

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P | E)\mathbb{P}(E) \\ &= 0,9999 \cdot 0,0002 + 0,001 \cdot 0,9998 = 0,00119978,\end{aligned}$$

on

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{0,9999 \cdot 0,0002}{0,00119978} = 0,166681$$

Esimerkki

Esimerkki 1.22

Riippumattomuus

Tapaukset A ja B ovat riippumattomat, jos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Tämä on ekvivalentti ehtojen $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ ja $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ kanssa (jos $\mathbb{P}(A) > 0$ ja $\mathbb{P}(B) > 0$).

Määritelmä (useampi tapaus)

Tapaukset $A_1, \dots, A_n$ ovat riippumattomat, jos

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n)$$

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.
- Jos A ja B ovat riippumattomat, niin ovat myös A ja $\overline{B}$, kuin myös $\overline{A}$ ja B , sekä $\overline{A}$ ja $\overline{B}$.

Esimerkkejä

Esimerkit 1.25–1.27

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä 0,05, 2. 0,08 ja 3. 0,01. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}) = \mathbb{P}(\bar{1})\mathbb{P}(\bar{2})\mathbb{P}(\bar{3}) \\ &= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526\end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(1 \cap \bar{2} \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap 2 \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap 3) \\ &= 0,05 \cdot 0,92 \cdot 0,99 + 0,95 \cdot 0,08 \cdot 0,99 \\ &\quad + 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,01 = 0,12952\end{aligned}$$

(yksi osuu)