

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä p ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että $k - 1$ ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja k :s onnistuu?
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on k , kun toistoja on n ?
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on n . Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan k kpl?

Esimerkki

Esimerkki 1.29

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jatkuvaan jakaumaan f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$$

(yleinen diskreetti jakauma)

Esimerkki

Painottamaton noppa: X saa arvot $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jokaisen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Painotettu noppa: X saa arvon 6 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja arvot $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4,5.$$

Määritelmä

Jakaumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

(jatkuva jakauma)

Huomautus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1,$$

$F(x)$ on kasvava funktio

Esimerkki

Kahden nopan heitossa

$$F(x) = 0, \text{ kun } x < 2,$$

$$F(x) = \frac{1}{36} \text{ kun } 2 \leq x < 3,$$

$$F(x) = \frac{1}{12} \text{ kun } 3 \leq x < 4,$$

$$F(x) = \frac{1}{6} \text{ kun } 4 \leq x < 5,$$

...

$$F(x) = \frac{35}{36} \text{ kun } 11 \leq x < 12,$$

$$F(x) = 1 \text{ kun } x \geq 12$$

Huomautus

Jos X on satunnaismuuttuja ja g koko reaaliakselilla määritelty funktio, niin $g(X)$ on myös satunnaismuuttuja ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

(jatkuva jakauma)

Esimerkki

jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $g(X) = aX + b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\end{aligned}$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 f(x)$$

Varianssin neliöjuurta $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ kutsutaan *keskihajonnaksi*.
Varianssi kuvaa jakauman leveyttä.

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s origomomentti on (jatkuva jakauma)

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s keskusmomentti on

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

Huomautus

$\mu_0(X) = 1$, $\mu_1(X) = 0$ ja $\mu_2(X) = \text{Var}(X)$.

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\&= \alpha_2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \alpha_2 - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \\&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Lause

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Lause

$\text{Var}(X) \geq 0$ ja diskreetille satunnaismuuttujalle $\text{Var}(X) = 0$ jos ja vain jos on sellainen c , että $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Lause

Lauseke $\mathbb{E}((X - c)^2)$ saa pienimmän arvonsa kun $c = \mathbb{E}(X)$ ja pienin arvo on $\text{Var}(X)$.