

# Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2026

## Määritelmä

Satunnaismuuttujan  $X$  varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 f(x)$$

Varianssin neliöjuurta  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$  kutsutaan *keskihajonnaksi*.  
Varianssi kuvaa jakauman leveyttä.

## Määritelmä

Satunnaismuuttujan  $X$   $n$ :s origomomentti on (jatkuva jakauma)

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

## Määritelmä

Satunnaismuuttujan  $X$   $n$ :s keskusmomentti on

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

## Huomautus

$\mu_0(X) = 1$ ,  $\mu_1(X) = 0$  ja  $\mu_2(X) = \text{Var}(X)$ .

## Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\&= \alpha_2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \alpha_2 - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \\&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

## Lause

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

## Lause

$\text{Var}(X) \geq 0$  ja diskreetille satunnaismuuttujalle  $\text{Var}(X) = 0$  jos ja vain jos on sellainen  $c$ , että  $\mathbb{P}(X = c) = 1$ .

## Lause

Lauseke  $\mathbb{E}((X - c)^2)$  saa pienimmän arvonsa kun  $c = \mathbb{E}(X)$  ja pienin arvo on  $\text{Var}(X)$ .

## Tasainen jakauma

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$ . Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

ja

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

## Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä  $p$  ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että  $k - 1$  ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja  $k$ :s onnistuu? (Geometrisen jakauma)
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on  $k$ , kun toistoja on  $n$ ? (Binomijakauma)
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on  $n$ . Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan  $k \geq n$ ? (Negatiivibinomijakauma)

## Binomijakauma

Toistetaan todennäköisyydellä  $p$  onnistuva koe (riippumattomasti)  $n$  kertaa. Satunnaismuuttujan  $X$  arvo on onnistuneiden kokeiden määrä ja tällöin

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ja

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ ja } \text{Var}(X) = np(1 - p)$$



## Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä  $p > 0$ . Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Todennäköisyys sille, että kaksimoottorinen kone ei selviydy, on  $p \cdot p = p^2$ .

Todennäköisyys sille, että nelimoottorinen kone ei selviydy, on

$$\binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 4p^3 - 3p^4.$$

$$4p^3 - 3p^4 < p^2 \Leftrightarrow p \in (0, \frac{1}{3}).$$

## Poisson-jakauma

Jos  $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ja  $\lambda > 0$ , on  $X$ :llä Poisson-jakauma, jos

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

## Huomautus

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

## Huomautus

Poisson-jakauma on hyvä approksimaatio Binomijakaumalle, mikäli  $p$  on pieni ja  $n$  suuri. Tarkemmin: Jos merkitään  $p = \lambda/n$ , on

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

## Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään  $p = \frac{\lambda}{n}$  ( $\lambda = np = \mathbb{E}(X)$ )

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ = & \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

## Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

## Lause

Jos  $f(k, t) = \mathbb{P}(k \text{ tapahtumaa aikavälillä } [0, t])$  ja

- Tapahtumat ovat riippumattomat
- $\mathbb{P}(\text{yksi tapahtuma } h\text{-pituisella aikavälillä}) = (v + g(h)) \cdot h$ ,  
missä  $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- $\mathbb{P}(k > 1 \text{ tapahtumaa } h\text{-pituisella aikavälillä}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

niin  $f(k, t) = \frac{e^{-vt}(vt)^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ , missä  $\lambda = vt$ .

## Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Binomijakaumaa käyttäen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - \binom{200}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{200} - \binom{200}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{199} \\ &\quad - \binom{200}{2} 0,01^2 \cdot 0,99^{198} \\ &= 0,323321 \dots\end{aligned}$$

## Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä  $p = 0,01$  ja  $n = 200$ , joten  $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$  ja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - e^{-2} \left( \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) \\ &= 0,323324 \dots\end{aligned}$$

## Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen satunnaisesti noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin  $3,57 \cdot 10^{10}$   $\alpha$ -hiukkasta sekunnissa. Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja joka edustaa  $\alpha$ -hiukkasten määrää nanosekunnissa. Tällöin  $\lambda = \mathbb{E}(X) = 3,57 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 35,7$  ja

$$\mathbb{P}(X = 36) = e^{-35,7} \cdot \frac{35,7^{36}}{36!} = 0,0662533.$$

Lisäksi

$$\mathbb{P}(35 \leq X \leq 37) = e^{-35,7} \left( \frac{35,7^{35}}{35!} + \frac{35,7^{36}}{36!} + \frac{35,7^{37}}{37!} \right) = 0,196989 \dots$$



## Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

## Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua  $\text{mm}^3$ :ssa verta.

Tutkimukseen otetaan  $0,001 \text{ mm}^3$  suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Määritetään todennäköisyys sille, että terveen ihmisen näytteestä löytyy korkeintaan 2 valkosolua. Tässä  $\lambda = 6$ , joten

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = e^{-6} \sum_{k=0}^2 \frac{6^k}{k!} = 0,0619688$$

Poisson- jakauma

Digital ELISA on a bead