

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Poisson- jakauma

Digital ELISA on a bead

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa, niin välillä $[0, t]$ esiintyy keskimäärin $\lambda = vt$ tapahtumaa ja satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(n) = e^{-vt} \frac{(vt)^n}{n!}$$

Merkitään ensimmäisen tapahtuman aikaa satunnaismuuttujalla T . Jos aikavälillä $[0, t]$ ei satu yhtään tapahtumaa, on siis $T > t$ ja

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-vt},$$

josta

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-vt}$$

Huomautus

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-vt}$$

on satunnaismuuttujan T kertymäfunktio, josta tiheysfunktio f saadaan derivoimalla:

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-vt}) = ve^{-vt}.$$

Eksponenttijakauma

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla T on eksponenttijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa $f(t) = ve^{-vt}$ (kun $t \geq 0$).

Tällöin

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{v} \text{ ja } \text{Var}(T) = \frac{1}{v^2}$$

Huomautus

Jos satunnaismuuttujalla on eksponenttijakauma, on

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t_1 + t_2 \mid T > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(T > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(T > t_1)} = \frac{e^{-v(t_1+t_2)}}{e^{-vt_1}} = e^{-vt_2} \\ &= \mathbb{P}(T > t_2)\end{aligned}$$

(Muistittomuus).

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Parametri $\nu = \frac{1}{40}$, ja todennäköisyystiheys $f(t) = \nu e^{-\nu t}$, kun taas kertymäfunktio $\mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - e^{-\nu \cdot 50}$.

Tällöin

$$\mathbb{P}(T \geq 50) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - (1 - e^{-\nu \cdot 50}) = 0,2865 \dots$$

Esimerkki

Geysirin edellisestä purkauksesta on 20 minuuttia. Mikä todennäköisyys sille, että seuraavaa saadaan odottaa ainakin 50 minuuttia?

Muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T \geq 50 + 20 \mid T \geq 20) = \mathbb{P}(T \geq 50) = 0,2865 \dots$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujaa T kutsutaan Poisson-prosessiksi, jos

- T :llä on Poisson-jakauma parametrilla $\lambda = vt$.
- Eri aikaväleillä sattuvat tapaukset ovat riippumattomat.

Huomautus

Edellämainitun perusteella Poisson-prosessin tapahtumien aikavälit noudattavat eksponenttijakaumaa. Parametria v kutsutaan Poisson-prosessin nopeudeksi.

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla on *standardoitu* normaalijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Tällöin kertymäfunktio on muotoa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Normaalijakaumaa kutsutaan myös *Gaussin jakaumaksi* ja sen tiheysfunktion kuvaajaa *Gaussin kellokäyräksi*.

Huomautus

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

on hankala laskea.

Vielä hankalampi laskettava on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Aiemmin taulukot, nykyisin ohjelmistot.

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esimerkki

Jos jatkuvalla satunnaismuuttujalla on standardoitu normaalijakauma, on

- $\mathbb{P}(X \leq 1,28) = \Phi(1,28) = 0,8997$
- $\mathbb{P}(X > 1,28) = 1 - \Phi(1,28) = 0,1003$
- $\mathbb{P}(X < -1,28) = 1 - \Phi(1,28) = 0,1003$
- $\mathbb{P}(X \geq -1,28) = 1 - \Phi(-1,28) = 0,8997$

Yleinen normaalijakauma

Jakaumalla $N(\mu, \sigma^2)$ tarkoitetaan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ja tästä johdettava kertymäfunktio

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Jakaumalle $N(\mu, \sigma^2)$ on $\mathbb{E}(X) = \mu$ ja $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$
- $\mathbb{P}(X > 7,54) = 1 - \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X \leq 4,46) = \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(-0,69) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X > 4,46) = 1 - \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(-0,69) = \Phi(0,69) = 0,7549$

Esimerkki

Led-lampun kestoikä T noudattaa normaalijakaumaa, jossa odotusarvo $\mu = 25000$ h ja keskihajonta $\sigma = 3000$ h. Määritetään seuraavat todennäköisyydet:

- $\mathbb{P}(T < 20000)$
- $\mathbb{P}(T > 50000)$
- $\mathbb{P}(22000 \leq T \leq 28000)$

Satunnaismuuttujien yhteisjakauma

Yhteisjakauma

Olkoon $p(x, y)$ satunnaismuuttujien X ja Y yhteinen jakauma ja $f(X, Y)$ jokin satunnaismuuttujien X ja Y funktio. Tällöin

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_x \sum_y f(x, y)p(x, y).$$

Riippumattomuus

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat, jos $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$ ja lisäksi samoin jakautuneet, jos $p_x = p_y$. Jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomat, on

- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y).$

Otoskeskiarvo, sen varianssi

Jos $X_1, \dots, X_n$ ovat samoin jakautuneita $((\mu, \sigma^2))$, riippumattomia satunnaismuuttujia ja

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

näiden aritmeettinen keskiarvo (ns. otoskeskiarvo), on

- $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = n \cdot \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_1) = \mu.$
- $\text{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)) = n \cdot \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$

Markovin epäyhtälö

Jos $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ ja $a > 0$, on

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Chebyschevin epäyhtälö

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Lause (Suurten lukujen laki)

Jos $X_1, \dots, X_n$ ovat samoin jakautuneita $((\mu, \sigma^2))$, riippumattomia satunnaismuuttujia ja

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

näiden aritmeettinen keskiarvo (ns. otoskeskiarvo), on jokaista $\epsilon > 0$ kohti

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Esimerkki

Heitetään noppaa n kertaa ja olkoon X_i heitolla i saatu silmäluku. Merkitään

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Kuinka suuri pitää heittojen määrän n olla, että varmasti

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > 0,1) \leq 0,01?$$