

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 1, 2.4.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Perustele jollain luennolla esitetyllä tavalla, että funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan (Mikä on määrittelyjoukko?).
2. Tarkastele tehtävän 1 funktion käyttäytymistä, kun origoa lähestytään suoria $y = kx$ pitkin. Täydennä tarkastelu koskemaan myös sitä suoraa, jota ei voi esittää muodossa $y = kx$ (mikä se on?). Mikä on raja-arvo, kun origoa lähestytään suoria pitkin?
3. Tarkastele tehtävän 1 funktion käyttäytymistä, kun origoa lähestytään paraabeleja $y = kx^2$ pitkin. Onko mahdollista saada erisuuria raja-arvoja eri k :n arvoilla?
4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}$. (**Korjattu 30.3**) Selvitä, onko tällä funktiolla olemassa raja-arvo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Ohje: Voit käyttää luennolla esitettyä napakoordinaatistomuunnosta tai jotain muuta tapaa.
5. $f(x, y) = 2x + 3y^2 - xy$ ja $y = 6x^3 + 4x - 1$. Laske $\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.
6. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.
7. Olkoon $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Määritä funktiolle $f(x, y)$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(2, 1)$ luento-esimerkin mukaisesti tarkastelemalla lauseketta $f(2 + h_1, 1 + h_2) - f(2, 1)$.
8. Määritä edellisen tehtävän funktiolle Jacobin matriisi pisteessä $(2, 1)$ sekä tähän pisteeseen piirretyn tangettitason yhtälö.
9. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = 3xy - x^2 y + 2xy^2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttämällä kuinka paljon funktion f arvo pisteessä $(2, 1)$ muuttuu, mikäli x ja y -koordinaateille sallitaan poikkeamat $|dx| \leq 0.01$ ja $|dy| \leq 0.05$.