Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 1, 2.4.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Perustele jollain luennolla esitetyllä tavalla, että funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan (Mikä on määrittelyjoukko?).

   Mallivastaus: Funktio on määritelty, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, siis määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

   Osoittaja voidaan kirjoittaa muotoon $p_1(x, y)^2 p_2(x, y)$, ja tämä on jatkuva funktio $\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$, koska projektiofunktiot ja polynomifunktiot (alkeisfunktioita) ovat. Samoin nimittäjä voidaan kirjoittaa muotoon $p_1(x, y)^4 + p_2(x, y)^2$. Tämä on jatkuva funktio samoin perustein kuin osoittajakin.

   Luennolla esitetyn lauseen mukaan osoittajan ja nimittäjän ollessa jatkuvia funktioita on osamääräkin sellainen joukossa, jossa nimittäjä ei saa arvoa 0.

2. Tarkastele tehtävän 1 funktion käyttäytymistä, kun origoa lähestytään suoria $y = kx$ pitkin. Täydennä tarkastelu koskemaan myös sitä suoraa, jota ei voi esittää muodossa $y = kx$ (mikä se on?). Mikä on raja-arvo, kun origoa lähestytään suoria pitkin?

   Mallivastaus: Jos $k \neq 0$, on

   $$f(x, kx) = \frac{x^2 kx}{x^4 + (kx)^2} = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

   Kun $k = 0$, on $y = 0$ ja jos $(x, y) \neq (0, 0)$, on $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \to 0} 0$.

   Origon kautta kulkeva suora, jota ei voida esittää muodossa $y = kx$ on $x = 0$ (y-akseli). Myös tällöin, kun $y \neq 0$, on $f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \to 0} 0$.

   Funktion raja-arvo on siis nolla, kun origoa lähestytään mitä hyvänsä suoraa pitkin.

3. Tarkastele tehtävän 1 funktion käyttäytymistä, kun origoa lähestytään paraabeleja $y = kx^2$ pitkin. Onko mahdollista saada erisuuria raja-arvoja eri k:n arvoilla?

   Mallivastaus:

   $$f(x, kx^2) = \frac{x^2 kx^2}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

   Valitsemalla esim. $k = +1$ saadaan raja-arvoksi $\frac{1}{2}$ ja $k = -1$ saadaan $-\frac{1}{2}$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}$. Selvitä, onko tällä funktiolla olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$. Ohje: Voit käyttää luennolla esitettyä napakoordinaatistomuunnosta tai jotain muuta tapaa.

   Mallivastaus: Tapa 1: Napakoordinaattimuunnoksilla $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ saadaan

   $$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta + 2r\sin\theta r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta + 2\sin\theta)}{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \\ &= r\cos\theta\sin\theta(\cos\theta + 2\sin\theta) \xrightarrow{r \to 0} 0. \end{aligned}$$

Tapa 2:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x^2y+2xy^2}{x^2+y^2}\right| &= \frac{\left|x^2y+2xy^2\right|}{\left|\left|(x,y)\right|\right|^2} \le \frac{\left|x^2y\right|+2\left|xy^2\right|}{\left|\left|(x,y)\right|\right|^2} = \frac{|x|\,|y|\,(|x|+2\,|y|)}{\left|\left|(x,y)\right|\right|^2} \\
&\le \frac{\left|\left|(x,y)\right|\right|\,\left|\left|(x,y)\right|\right|\,(\left|\left|(x,y)\right|\right|+2\left|\left|(x,y)\right|\right|)}{\left|\left|(x,y)\right|\right|^2} \\
&= \frac{3\left|\left|(x,y)\right|\right|^3}{\left|\left|(x,y)\right|\right|^2} = 3\left|\left|(x,y)\right|\right|,
\end{aligned}
$$

mistä nähdään, että kun (x,y) on lähellä origoa, on myös funktion arvo lähellä nollaa.

5. $f(x,y) = 2x + 3y^2 - xy$ ja $y = 6x^3 + 4x - 1$. Laske $\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= 2 + 6y\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} = 2 + 6(6x^3+4x+1)(18x^2+4) - (6x^3+4x-1) - x(18x^2+4) \\
&= 648x^5 + 552x^3 - 108x^2 + 88x - 21.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - x.
$$

6. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

   Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 3y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x + 2y, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2.
\end{aligned}
$$

7. Olkoon $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Määritä funktiolle $f(x,y)$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(2,1)$ luentoesimerkin mukaisesti tarkastelemalla lauseketta $f(2+h_1, 1+h_2) - f(2,1)$.

   Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
& f(2+h_1,1+h_2) - f(2,1) = (2+h_1)^2 + 3(2+h_1)(1+h_2) + (1+h_2)^2 - 11 \\
= \; & 4 + 4h_1 + h_1^2 + 3(2 + h_1 + 2h_2 + h_1h_2) + 1 + 2h_2 + h_2^2 - 11 \\
= \; & 7h_1 + 8h_2 + h_1^2 + 3h_1h_2 + h_2^2,
\end{aligned}
$$

   jonka lineaarinen osa on $7h_1+8h_2$. Approksimoiva lineaarikuvaus on siis $T(x,y) = 7x + 8y$.

8. Määritä edellisen tehtävän funktiolle Jacobin matriisi pisteessä $(2,1)$ sekä tähän pisteeseen piirretyn tangettitason yhtälö.

   Mallivastaus: Tapauksessa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Jacobin matriisi on tyyppiä 1×2:

$$
\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x+3y, 3x+2y),
$$

   ja pisteessä $(x,y) = (2,1)$ tästä tulee $\nabla f(2,1) = (7,8)$. Tangenttitason yhtälö on täten

$$
7(x-2) + 8(y-1) - (z-11) = 0 \Leftrightarrow 7x + 8y - z = 11.
$$

9. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = 3xy - x^2y + 2xy^2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttämällä kuinka paljon funktion f arvo pisteessä $(2, 1)$ muuttuu, mikäli x ja y-koordinaateille sallitaan poikkeamat $|dx| \leq 0.01$ ja $|dy| \leq 0.05$.

   Mallivastaus: Approksimoidaan muutosta kokonaisdifferentiaalin avulla. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xy + 2y^2$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - x^2 + 4xy$

   Pisteessä $(2, 1)$ on $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 10$, joten

$$|df| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \right| \leq 1\,|dx| + 10\,|dy| \leq 0.01 + 10 \cdot 0.05 = 0.51.$$