Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 2, 9.4.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti:

   $$f(x, y, z) = (3x^2 + zy, z^2x - 2yz).$$

   Määritä funktion f Jacobin matriisi $J_f(x, y, z)$. Laske myös $J_f(3, 1, 2)$ ja määritä sen avulla funktion Fréchet'n derivaatta pisteessä $(3, 1, 2)$

2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y, z) = 3xyz - x^2z + 2xyz^2$. Määritä $D_{\boldsymbol{u}}f(x, y, z)$ kun $\boldsymbol{u}$ on vektorin $\boldsymbol{v} = (1, -3, 2)$ suuntainen yksikkövektori. Mihin suuntaan pisteestä $(3, 2, 5)$ pitäisi siirtyä, jotta funktion arvo kasvaisi nopeimmin ja mikä on suunnatun derivaatan arvo nopeimman kasvun suuntaan?

3. Olkoon $f(x, y, z) = (3xy^2, xyz, yz^2)$. Laske seuraavista kaikki ne, jotka on määritelty: ∇f, $\nabla \cdot f$, $\nabla \times f$, ja $\nabla^2 f$.

4. Kaksiulotteisessa mallissa positiivisen pistevarauksen muodostama sähkökenttä suuntautuu suoraviivaisesti pisteestä poispäin kaikkiin suuntiin, mutta heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyteen.

   Muodosta kaksiulotteinen matemaattinen malli origoon sijoitetun positiivisen pistevarauksen sähkökentälle $f(x, y)$ ja laske $\nabla \cdot f$, kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Fysikaaliset vakiot sivuutetaan. Tulkitse lopuksi miten tulos vertautuu divergenssin edustamaan "lähteisyyteen".

   Ohje: Pisteeseen (x, y) liitettävä vektori on tämän suuntainen, mutta pistettä (x, y) vastaava yksikkövektori on $\frac{1}{||(x,y)||}(x, y)$. Jos halutaan tämän heikkenevän suhteessa etäisyyteen, pitää ko. yksikkövektori kertoa vielä tekijällä $\frac{1}{||(x,y)||}$. Osittainen vastaus: Kenttä on $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$.

   Lisäohje: Kaksiulotteisessa tapauksessa $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ ja $\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$

5. Kolmiulotteisessa mallissa positiivisen pistevarauksen muodostama sähkökenttä suuntautuu suoraviivaisesti pisteestä poispäin kaikkiin suuntiin, mutta heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Modifioi edellistä tehtävää ja esitä matemaattinen malli origoon sijoitetun positiivisen pistevarauksen sähkökentälle $f(x, y, z)$.

6. Muodosta matemaattinen malli vektorikentästä f, joka muodostaa pyörteen kolmiulotteisessa avaruudessa z-akselin ympäri. Ohje: Tasossa pyörteen suuntavektorin pitäisi olla kohtisuorassa paikkavektoria vastaan. Mieti millainen vektori (x, y)-toteuttaisi tämän, ja lisää z-komponentti. Laske lopuksi $\nabla \times f$ ja tulkitse tulosta.

   Ohje: Kohtisuoruus merkitsee sitä, että pistetulo on nolla. Millaisen vektorin pistetulo vektorin (x, y) kanssa olisi nolla? Lisää myös z-koordinaatti. Osittainen vastaus: Kenttä on $f(x, y, z) = (-y, x, z)$

7. Vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on *konservatiivinen*, jos f on jonkin skalaarikentän $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gradientti, siis $f = \nabla\phi$. Osoita suoraan laskemalla, että konservatiivinen vektorikenttä on pyörteetön, mikäli funktion ϕ toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Ohje: Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, voidaan osittaisderivoinnin järjestys vaihtaa.

8. Kaksiulotteisen vektorikentän $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ konservatiivisuus määritellään samoin kuin kolmiulotteisessa tapauksessa: Konservatiivinen vektorikenttä on jonkin skalaarikentän gradientti. Onko tehtävän 4 vektorikenttä konservatiivinen? Jos on, mikä on funktio ϕ, jolle $f = \nabla\phi$? Ohje: Yritä ensin ratkaista yhtälö
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
integroimalla x:n suhteen. Huomaa, että osoittaja on vakiokerrointa vaille nimittäjän derivaatta.

9. Tee sijoitus $u = x + 2y$ ja $v = x - 2y$ ja kirjoita osittaisdifferentiaaliyhtälö
$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$
muuttujien u ja v osittaisdifferentiaaliyhtälöksi, ts. osittaisdifferentiaaliyhtälöksi jossa alkuperäisten osittaisderivaattojen sijasta esiintyvät $\frac{\partial f}{\partial u}$ ja $\frac{\partial f}{\partial v}$. Ohje: käytä ketjusääntöä ja esitä sen avulla $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Voit käyttää luennolla esitettyä menettelytapaa. Esitä myös osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu.