

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 1

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2026

## Peruskäsitteitä

- Määritellään funktioina  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , jossa jokainen  $f_i$  on funktio  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Tällä kurssilla termi funktio voi tarkoittaa myös *osittain määriteltyä* funktiota.

## Määritelmä

Osittain määritelty funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on relaatio  $f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , jolle on olemassa sellainen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , että  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  on funktio. Käytännössä tämä tarkoittaa, että  $f$  ei ole välttämättä määritelty koko  $\mathbb{R}^n$ :ssä vaan vain jossain sen osajoukossa  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

## Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos  
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  määrittelee pinnan avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  (esim  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ )
- Jatkuva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  määrittelee käyrän avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ .  
(esim.  $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ )
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  esittää kolmiulotteisen avaruuden vektorisuuretta  
(vektorikenttä)

## Määritelmä

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

jos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \epsilon)$$

## Huomautus

Tässä yhteydessä

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

## Määritelmä

Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{x}_0$ , jos  $f(\mathbf{x}_0)$  on määritelty ja

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

## Huomioita ja määritelmiä

- $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$
- $|f_i(\mathbf{x}) - y_i| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \leq |f_1(\mathbf{x}) - y_1| + \dots + |f_n(\mathbf{x}) - y_n|$
- Jos  $f$  on jatkuva, ovat myös kaikki koordinaattifunktiot jatkuvia ja päinvastoin.
- Raja-arvo: Määrittely samoin kuin  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Raja-arvo: Ei riitä tarkastelu eri suunnista
- Jatkuvuus: Määrittely samoin kuin  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## Määritelmä

Projektiotfunktiot  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

## Lause

Oletetaan, että  $f$  ja  $g$  ovat funktioita  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja että

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = B$ . Tällöin

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} p_i(\mathbf{x}) = a_i$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha A + \beta B$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = AB$
- Jos  $B \neq 0$ , niin  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{A}{B}$ .

## Lause

Jos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$   $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$  ja

$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$ , niin

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0.$$

## Seuraus

Olkoot  $f$  ja  $g$  jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a}$  ja  $g(\mathbf{a}) \neq 0$ .

- Projektiofunktiot ovat jatkuvia kaikkialla.
- $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$
- $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ .
- Edellisen lauseen merkinnöin  $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{x}_0$ .

## Esimerkki

Napakoordinaattimuunnos

## Topologisia käsitteitä

- Suljetun välin yleistys 1:  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
- Suljetun välin yleistys 2: Kompakti joukko
- Avoimen välin yleistys 1:  $B(\mathbf{x}, r)$  (avoin pallo)
- Avoimen välin yleistys 2: Avoin joukko

## Osittaisderivaatta

Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  osittaisderivaatta  $i$ :n muuttujan  $x_i$  suhteen pisteessä  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät:  $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ,  $\partial_{x_i} f$  ja  $D_{x_i} f(\mathbf{a})$ . Jos muuttujien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää  $D_i f(\mathbf{a})$  käytetään.

## Huomautus

$(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_i$ , joten

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}.$$