Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Suunnattu derivaatta

Olkoon $||\boldsymbol{u}|| = 1$. Tällöin

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j$, on

$$D_{\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Kaikille sisätuloille pätee

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),$$

jossa yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat lineaarisesti riippuvia, siis $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$.

Seuraus

Erityisesti pistetulolle pätee

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||,$$

jossa on yhtäsuuruus tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$.

Seuraus

$$|D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})| = |\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}| \leq ||\nabla f(\boldsymbol{x})|| \cdot ||\boldsymbol{u}|| = ||\nabla f(\boldsymbol{x})||$$

ja yhtäsuuruus pätee tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{u} = c\nabla f(\boldsymbol{x})$.

Johtopäätös

Differentioituva funktio muuttuu jyrkimmin gradientin osoittamassa suunnassa.

Johtopäätös

$\nabla f(x, y, x)$ on kohtisuorassa pintaa $f(x, y, z) = 0$ vastaan

Nabla operaattorina

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$

- Nabla: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- Skalaarikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gradientti ∇f on vektorikenttä

$$\nabla f = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

- Vektorikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ divergenssi $\nabla \cdot f$ on skalaarikenttä

$$\nabla \cdot f = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Nabla operaattorina

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$

- Vektorikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pyörre $\nabla \times f$ on vektorikenttä

$$
\begin{aligned}
\nabla \times f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Nabla operaattorina

Terminologia

$\nabla \times f$ tunnetaan perinteisesti nimellä *roottori*. Englanninkielinen vastine curl voisi suomeksi olla pöyrteisyys, kierre, kierteisyys, pyörrevirta, kurimus, syöveri, kiemura, kiehkura, jne.

Laplacen operaattori

$$\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f)$?

$$
\begin{aligned}
& g(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}))-g(f(\boldsymbol{x})) \\
= \; & g(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}))-g(f(\boldsymbol{x})) \\
\approx \; & g(f(\boldsymbol{x})+Df(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h})-g(f(\boldsymbol{x})) \\
\approx \; & Dg(f(\boldsymbol{x}))Df(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}
\end{aligned}
$$

Ketjusääntö

$$D(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = Dg(f(\boldsymbol{x})) \circ Df(\boldsymbol{x})$$

Jacobin matriiseille:

$$J_{g \circ f}(\boldsymbol{x}) = J_g(f(\boldsymbol{x}))J_f(\boldsymbol{x})$$

Differentiaalilaskentaa

Esimerkki

Funktiolle $z(x, y)$ on

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Esimerkki

Esimerkit 22–25, aaltoyhtälö