

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 1

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2026

## Määritelmä

Piste  $\mathbf{a}$  on funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaali maksimi, jos on olemassa sellainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö  $B = B(\mathbf{a}, r)$ , että  $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$  aina, kun  $\mathbf{x} \in B$ .

## Määritelmä

Piste  $\mathbf{a}$  on funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaali maksimi, jos on olemassa sellainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö  $B = B(\mathbf{a}, r)$ , että  $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$  aina, kun  $\mathbf{x} \in B$ .

Samoin määritellään lokaali minimi.

## Määritelmä

Piste  $\mathbf{a}$  on funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaali maksimi, jos on olemassa sellainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö  $B = B(\mathbf{a}, r)$ , että  $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$  aina, kun  $\mathbf{x} \in B$ .

Samoin määritellään lokaali minimi. Yhteisnimitys: Lokaali ääriarvo.

## Ääriarvot

Lause: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaaleissa ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on kaikkiin suuntiin  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ .

## Ääriarvot

Lause: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaaleissa ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on kaikkiin suuntiin  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ . Erityisesti  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ .

## Ääriarvot

Lause: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaaleissa ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on kaikkiin suuntiin  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ . Erityisesti  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ . Käsitteeseen liittyy että  $\mathbf{a}$  ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

## Ääriarvot

Lause: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaaleissa ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on kaikkiin suuntiin  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ . Erityisesti  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ . Käsitteeseen liittyy että  $\mathbf{a}$  ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

## Kriittinen piste

Piste  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  on funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kriittinen piste jos  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ . Myös tässä oletetaan, että  $\mathbf{a}$  ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

## Ääriarvot

Lause: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lokaaleissa ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on kaikkiin suuntiin  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ . Erityisesti  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ . Käsitteeseen liittyy että  $\mathbf{a}$  ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

## Kriittinen piste

Piste  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  on funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kriittinen piste jos  $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ . Myös tässä oletetaan, että  $\mathbf{a}$  ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

## Esimerkki 4.4.

(J.Lahtonen)

Vertaa:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon_1(h)$$

Vertaa:

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon_1(h) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + h^2\epsilon_2(h)\end{aligned}$$

Vertaa:

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon_1(h) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + h^2\epsilon_2(h)\end{aligned}$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})$$

Vertaa:

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon_1(h) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + h^2\epsilon_2(h)\end{aligned}$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})$$

Korkeamman asteen approksimaatiot?

## Toisen asteen approksimaatio

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \epsilon_2(\mathbf{h})$$

## Toisen asteen approksimaatio

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \epsilon_2(\mathbf{h}),$$

missä

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

on ns. Hessian matriisi.

## Toisen asteen approksimaatio

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \epsilon_2(\mathbf{h}),$$

missä

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

on ns. Hessen matriisi. Joissain kirjoissa merkitään  $H(\mathbf{x}_0) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$

## Määritelmä

Matriisi  $H$  on

- Positiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} > 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$

## Määritelmä

Matriisi  $H$  on

- Positiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} > 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$
- Negatiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} < 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$

## Määritelmä

Matriisi  $H$  on

- Positiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} > 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$
- Negatiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} < 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$
- Indefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h}$  saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

## Määritelmä

Matriisi  $H$  on

- Positiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} > 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$
- Negatiividefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h} < 0$  aina kun  $\mathbf{h} \neq 0$
- Indefiniitti, jos  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h}$  saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Termit positiivisemidefiniitti ja negatiivisemidefiniitti tarkoittavat, että  $\mathbf{h}^T H \mathbf{h}$  voi olla nolla vaikka  $\mathbf{h} \neq 0$ , mutta  $H$  ei ole indefiniitti.

## Lause

Jos funktion  $f$  kriittisessä pisteessä  $\mathbf{x}_0$  Hessian matriisi  $H_f(\mathbf{x}_0)$  on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi

## Lause

Jos funktion  $f$  kriittisessä pisteessä  $\mathbf{x}_0$  Hessen matriisi  $H_f(\mathbf{x}_0)$  on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi

## Lause

Jos funktion  $f$  kriittisessä pisteessä  $\mathbf{x}_0$  Hessen matriisi  $H_f(\mathbf{x}_0)$  on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

## Lause

Jos funktion  $f$  kriittisessä pisteessä  $\mathbf{x}_0$  Hessen matriisi  $H_f(\mathbf{x}_0)$  on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Jos Hessen matriisi on semidefiniitti, ei ääriarvon laatu selviä tällä tavalla.

## Todistuksen idea:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \epsilon_2(\mathbf{h})$$

## Lause

Jos funktion  $f$  kriittisessä pisteessä  $\mathbf{x}_0$  Hessen matriisi  $H_f(\mathbf{x}_0)$  on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Jos Hessen matriisi on semidefiniitti, ei ääriarvon laatu selviä tällä tavalla.

## Todistuksen idea:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \epsilon_2(\mathbf{h}),$$

## Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva

## Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva  
Sylvesterin kriteeri

## Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva

Sylvesterin kriteeri

Esimerkkejä



## Avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Jos  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(x_0, y_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) \neq 0$ , niin on olemassa funktio  $f$ , jonka derivaatta on jatkuva ja pisteen  $(x_0, y_0)$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

## Avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Jos  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(x_0, y_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) \neq 0$ , niin on olemassa funktio  $f$ , jonka derivaatta on jatkuva ja pisteen  $(x_0, y_0)$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ .

Lisäksi

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(x_0, y_0)}{\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0)}$$

Avaruudessa  $\mathbb{R}^n$

Jos  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(\mathbf{x}_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , niin on olemassa differentioituva funktio  $g$  ja pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$

Avaruudessa  $\mathbb{R}^n$

Jos  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(\mathbf{x}_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , niin on olemassa differentioituva funktio  $g$  ja pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Avaruudessa  $\mathbb{R}^n$

Jos  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(\mathbf{x}_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , niin on olemassa differentioituva funktio  $g$  ja pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Toisin: Jos jokin gradientin  $\nabla G$  koordinaateista  $\frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  on  $\neq 0$ , voidaan  $G$ :n  $j$ :s koordinaatti esittää muiden differentioituvana funktiona pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävässä suorakulmiossa

## Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Jos  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja  $G(\mathbf{x}_0) = 0$  sekä  $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , niin on olemassa differentioituva funktio  $g$  ja pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävä suorakulmio, jossa  $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Toisin: Jos jokin gradientin  $\nabla G$  koordinaateista  $\frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  on  $\neq 0$ , voidaan  $G$ :n  $j$ :s koordinaatti esittää muiden differentioituvana funktiona pisteen  $\mathbf{x}_0$  sisältävässä suorakulmiossa

## Määritelmä

Joukko  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid G(\mathbf{x}) = 0\}$  on *säännöllinen (sileä)* pisteessä  $\mathbf{a} \in S$ , jos  $\nabla G(\mathbf{a}) \neq 0$ .

## Tangenttiavaruus

Huom.  $\nabla G$  on kohtisuorassa pintaan  $G(\mathbf{x}) = 0$  nähden.

## Tangenttiavaruus

Huom.  $\nabla G$  on kohtisuorassa pintaan  $G(\mathbf{x}) = 0$  nähden.

## Määritelmä

Pinnan  $S = \{\mathbf{x} \mid G(\mathbf{x}) = 0\}$  *tangenttiavaruus*  $T$  pisteessä  $\mathbf{a}$  koostuu niistä vektoreista  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ , jotka ovat kohtisuorassa gradienttiin  $\nabla G(\mathbf{a})$ , nähden:

$$T = \{\mathbf{x} \mid \nabla G(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\}.$$

## Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

## Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

### Yksi side-ehto

Pinnan  $G(\mathbf{x}) = 0$  säännöllisissä pisteissä funktion  $f$  ääriarvo toteuttaa yhtälön

$$\nabla f = \lambda \nabla G$$

## Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

## Yksi side-ehto

Pinnan  $G(\mathbf{x}) = 0$  säännöllisissä pisteissä funktion  $f$  ääriarvo toteuttaa yhtälön

$$\nabla f = \lambda \nabla G$$

## Monta side-ehtoa

Ehdot  $G_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, G_m(\mathbf{x}) = 0$  voidaan koota yhdeksi funktioksi

$$G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, G(\mathbf{x}) = (G_1(\mathbf{x}), \dots, G_m(\mathbf{x}))$$

ja side-ehdot yhdessä:  $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

## Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa "ratkaista" muiden avulla ?

## Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa "ratkaista" muiden avulla ?  
Mietintöä varten korvataan  $G$  Frechet'n derivaatalla  $DG$  jossakin pisteessä.

## Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa "ratkaista" muiden avulla ?  
Mietintöä varten korvataan  $G$  Frechet'n derivaatalla  $DG$  jossakin pisteessä. Tätä edustaa Jacobin matriisi

$$J_G = \begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \vdots \\ \nabla G_m \end{pmatrix}$$

ja tarkastellaan yhtälön  $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  sijasta yhtälöä

$$J_G \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

## Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon  $m < n$ . Jos  $A$  on  $m \times n$  matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko?

## Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon  $m < n$ . Jos  $A$  on  $m \times n$  matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko?  $m$  yhtälöä  $n$ , muuttujaa.

## Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon  $m < n$ . Jos  $A$  on  $m \times n$  matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko?  $m$  yhtälöä  $n$ , muuttujaa. Milloin voidaan  $n - m$  muuttujaa esittää  $m$  muuttujan avulla?

## Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon  $m < n$ . Jos  $A$  on  $m \times n$  matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{n2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko?  $m$  yhtälöä  $n$ , muuttujaa. Milloin voidaan  $n - m$  muuttujaa esittää  $m$  muuttujan avulla?

Vastaus: Kun matriisi on täysiasteinen  $\Leftrightarrow$  matriisin rivit tai sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.

## Määritelmä

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  on funktion  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  säännöllinen piste, jos Jacobin matriisi  $J_G(\mathbf{a})$  on täysiasteinen.

## Määritelmä

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  on funktion  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  säännöllinen piste, jos Jacobin matriisi  $J_G(\mathbf{a})$  on täysiasteinen.

## Lause (Lagrangen kertoimet)

Jos funktioiden  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ja piste  $\mathbf{a}$  on funktion  $f$  ääriarvo joukossa  $\{\mathbf{x} \mid G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  ja  $\mathbf{a}$  on  $G$ :n säännöllinen piste, niin tällöin on olemassa vakiot  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  joille pätee

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla G_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(\mathbf{a}).$$