

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 1, 23.4.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

1. Olkoon A avaruuden \mathbb{R}^2 suorakulmio $A = [0, 3] \times [0, 2]$. Laske integraali

$$\int_A (x^2 - 2xy + 3y^2) d\mathbf{x}.$$

Huomautus: Tässä tehtävässä, kuten jäljemmissäkin, $d\mathbf{x}$ on kollektiivinen merkintä, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa $dx dy$.

2. Olkoon A avaruuden \mathbb{R}^2 suorakulmio $A = [-2, 2] \times [-1, 1]$. Laske integraali

$$\int_A (2x^2 - 3xy + y^2) d\mathbf{x}.$$

3. Olkoon K kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$, ja $(1, 1)$. Laske integraali

$$\int_K (2x^2 - 3xy + y^2) d\mathbf{x}$$

Ohje: Selvitä aluksi millainen on pisteitä $(0, 0)$ ja $(1, 1)$ yhdistävän suoran yhtälö.

4. Laske edellisen tehtävän integraali uudelleen vaihtamalla integointijärjestys toisin päin.
5. Olkoon A tason \mathbb{R}^2 alue, jota rajoittavat x -akseli, suora $x = 1$ ja käyrä $y = x^3$. Laske integraali

$$\int_A (x + y) d\mathbf{x}.$$

6. Olkoon A tason \mathbb{R}^2 alue, jota rajoittavat x -akseli, suora $x = 1$ ja käyrä $y = \sqrt[3]{x}$. Laske integraali

$$\int_A (x + y) d\mathbf{x}.$$

7. Epähomogeenisen kappaleen massa saadaan integraalina

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

missä $\rho(\mathbf{x})$ on kappaleen tiheys pisteessä \mathbf{x} . Oletetaan, että särmiön muotoisen kappaleen $[0, 3] \times [0, 2] \times [0, 1]$ tiheys määräytyy funktion $\rho(x, y, z) = 1 + 2x + y + 3z$ mukaisesti. Määritä kappaleen massa.

8. Laske integraali

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 e^{-x^2} dx dy$$

vaihtamalla ensin integointijärjestys. Selvitä aluksi mikä on alue, jonka yli integroidaan.

9. Kappaletta V rajoittavat xy , xz ja yz -tasot sekä tasot $2x + y = 2$ ja $z = 1 + y$. Laske kappaleen tilavuus.