Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 2, 30.4.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Laske funktion $f(x,y) = 2x+y$ integraali alueessa, jota rajoittavat suora $y = x$ ja käyrä $y = \sqrt{x}$.

2. Laske funktion $f(x,y) = 2x + y$ integraali alueessa, jota rajoittavat suorat $y = 1$, $y = x$, ja $y = 2x$.

3. Laske
$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, d\boldsymbol{x},$$
missä A on tason $\mathbb{R}^2$ origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ (tason I neljännes).

4. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö $x^2 + y^2 = 1$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa x, y, $z \geq 0$. Laske aluksi sisin integraali z:n suhteen ja käytä xy-koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

5. Laske
$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$
Ohje: Integrointialue on eräs ympyräsektori. Vihje: Saat ympyrän tarkastelemalla sisemmän integraalin ylärajaa. Selvitä sektorin kylkien kulmat alkeistrigonometrialla, ja käytä sitten napakoordinaatteja.

6. Laske integraali
$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dy\, dx.$$
Ohje: Sijoita $x = \frac{1}{2}(r-s)$, $y = \frac{1}{2}(r+s)$, piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti.

7. *Astroidi* on käyrä, jolla on parametriesitys $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$. Hahmottele kuva ja määritä astroidin reunakäyrän pituus.

8. *Bernoullin lemniskaatta* on käyrä, jolla on napakoordinaattiesitys $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (a on vakio). Hahmottele kuva ja kirjoita lauseke reunakäyrän pituudelle.

   Ohje: Parametriesitys saadaan napakoordinaattiesityksestä kirjoittamalla $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, paremetrina θ. r pitää ratkaista napakoordinaattiesitysestä.

9. Määritä käyrän $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ pituus välillä $x \in [0, 1]$. Ohje: Voidaan asettaa parametriesitys $x = t$, $y = \cosh t$, $t \in [0, 1]$.