

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

## Demonstraatio 3, 7.5.2026

1. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} xy \, dx - y^2 \, dy,$$

kun  $\gamma$  on jana pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(2, 1)$ .

2. Laske edellisen tehtävän käyräintegraali, kun  $\gamma$  on paraabelin kaari  $y = \frac{1}{4}x^2$  pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(2, 1)$ .
3. Osoita, että vektorikenttä

$$F(x, y, z) = (4xyz - y^2z, 2x^2z - 2xyz, 2x^2y - xy^2 + 8z^3)$$

on konservatiivinen etsimällä sille potentiaali  $V$ . Ohje: Käytä luennolla esitettyä integrointimenetelmää.

4. Laske edellisen tehtävän vektorikentälle käyräintegraali

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{x},$$

kun  $\gamma$  on murtoviiva  $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (a, b, 0) \rightarrow (a, b, c)$  **käyttämättä potentiaalifunktiota**. Ohje: Ensimmäinen osa voidaan parametrisoida esim  $(x, y, z) = (t, 0, 0)$ , missä  $t \in [0, a]$ , toinen  $(x, y, z) = (a, t, 0)$ , missä  $t \in [0, b]$  ja kolmas  $(x, y, z) = (a, b, t)$ , missä  $t \in [0, c]$ .

5. Laske pinnan  $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v^2, 2u, v)$  sen osan ala, joka muodostuu, kun  $(u, v)$  käy läpi ellipsin  $(2r \cos \theta, r \sin \theta)$ , missä  $r \in [0, 1]$  ja  $\theta \in [0, 2\pi]$
6.  $\gamma$  on murtoviiva  $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 0)$ . Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} x^2y \, dx + 3xy^2 \, dy$$

käyttämällä Greenin lausetta.

7. Laske vektorikentän  $(x^2, y^2, x^2)$  pintaintegraali yli kappaleen  $\{(x, y, z) \in [0, 3] \times [-2, 2] \times [0, 2\pi]\}$ . Ohje: Käytä divergenssilausesta.
8. Laske vektorikentän  $(2x, y^2, z^2)$  pintaintegraali yli yksikköpallon  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  pinnan. Ohje: Käytä divergenssilausesta.
9. Olkoon  $S$  origokeskinen  $r$ -säteinen ympyräpinta. Oletetaan, että origossa sijaitseva varaus on  $Q$ , jolloin Maxwellin yhtälöiden mukaan pitäisi olla

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

missä  $\epsilon_0$  on vakio ja  $\mathbf{E}$  on sähkökenttä. Millainen on sähkökentän  $\mathbf{E}$  lauseke?

Ohje: Integrandi  $\mathbf{E}(r)$  on vakio, kun  $r$  on kiinteä etäisyys origosta. Integraalin arvo on tällöin pinnan ala kertaa  $E(r)$  (missä  $E(r)$  edustaa sähkökentän voimakkuuden itseisarvoa).