Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 3, 7.5.2026

1. Laske käyräintegraali
$$\int_\gamma xy\,dx - y^2\,dy,$$
kun γ on jana pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(2,1)$.

   Mallivastaus: Jana on osa suoraa $y = \frac{1}{2}x$, joten $dy = \frac{1}{2}\,dx$ ja käyräintegraaliksi saadaan
$$\int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x\,dx - (\frac{1}{2}x)^2 \frac{1}{2}\,dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,dx = \Big/_{\!0}^{2} \frac{1}{8}x^3 = 1.$$

2. Laske edellisen tehtävän käyräintegraali, kun γ on paraabelin kaari $y = \frac{1}{4}x^2$ pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(2,1)$.

   Mallivastaus: Paraabelin kaarella on $dy = \frac{1}{2}x\,dx$ ja käyräintegraaliksi saadaan
$$\begin{aligned}&\int_0^2 x\frac{1}{4}x^2\,dx - (\frac{1}{4}x^2)^2\,\frac{1}{2}x\,dx = \int_0^2 (\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5)\,dx\\ =\ &\Big/_{\!0}^{2}(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{6\cdot 32}x^6) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. Osoita, että vektorikenttä
$$F(x,y,z) = (4xyz - y^2z, 2x^2z - 2xyz, 2x^2y - xy^2 + 8z^3)$$
on konservatiivinen etsimällä sille potentiaali V. Ohje: Käytä luennolla esitettyä integrointimenetelmää.

   Mallivastaus: Ensinnäkin pitäisi olla $\frac{\partial V}{\partial x} = 4xyz - y^2z$, josta $V = 2x^2yz - xy^2z + C(y,z)$. Tällöin
$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x^2z - 2xyz + \frac{\partial C}{\partial y}$$
ja vertaamalla tätä vektorikentän toiseen komponenttiin saadaan
$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$
josta $C(y,z) = D(z)$. Lopuksi $\frac{\partial V}{\partial z} = 2x^2y - xy^2 + D'(z)$, ja vertaamalla tätä 3. komponenttiin saadaan $D'(z) = 8z^3$, josta $D(z) = 2z^4 + C$. Näin ollen kysytty potentiaali on
$$V(x,y,z) = 2x^2yz - xy^2z + 2z^4 + C,$$
missä C on vakio.

4. Laske edellisen tehtävän vektorikentälle käyräintegraali
$$\int_\gamma F \cdot d\boldsymbol{x},$$
kun γ on murtoviiva $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (a,b,0) \to (a,b,c)$ **käyttämättä potentiaalifunktiota**. Ohje: Ensimmäinen osa voidaan parametrisoida esim

$(x, y, z) = (t, 0, 0)$, missä $t \in [0, a]$, toinen $(x, y, z) = (a, t, 0)$, missä $t \in [0, b]$ ja kolmas $(x, y, z) = (a, b, t)$, missä $t \in [0, c]$.

Mallivastaus: 1. välillä $dx = dt$ ja $dy = dz = 0$, joten tätä osaa vastaava käyräintegraali on

$$\int_0^a (4t \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 0)\, dt = 0$$

2. välillä $dx = 0$, $dy = dt$ ja $dz = 0$, joten tällä osalla käyräintegraali on

$$\int_0^b (2a^2 \cdot 0 - 2at \cdot 0)\, dt = 0$$

ja 3. välillä $dx = dy = 0$ ja $dz = dt$, joten koko käyräintegraalin arvo on

$$\int_0^c (2a^2b - ab^2 + 8t^3)\, dt = \Big/_0^c (2a^2bt - ab^2t + 2t^4) = 2a^2bc - ab^2c + 2c^4.$$

Huom: Tulos on hyvin sopusoinnussa sen kanssa, että edellisen tehtävän mukaan $V(a, b, c) = 2a^2bc - ab^2c + 2c^4 + C$.

5. Laske pinnan $\boldsymbol{r}(u, v) = (u^2 + v^2, 2u, v)$ sen osan ala, joka muodostuu, kun (u, v) käy läpi ellipsin $(2r\cos\theta, r\sin\theta)$, missä $r \in [0, 1]$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$

   Mallivastaus: $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (2u, 2, 0)$ ja $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (2v, 0, 1)$, mistä

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (2, -2u, -4v)$$

   ja

$$\left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\right| = 2\sqrt{1 + u^2 + 4v^2}.$$

   Tällöin kysytty pinta-ala on

$$2 \iint_{(u,v)\in E} \sqrt{1 + u^2 + 4v^2}\, du\, dv,$$

   missä E on tehtävänannossa kuvailtu ellipsi. Sijoittamalla integraaliin $u = 2r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ saadaan jacobin matriisin determinantiksi $2r$. Näin ollen sijoitus antaa muodon

$$\begin{aligned}
&2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{1 + 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta}\, 2r\, dr\, d\theta \\
=\ &4\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 4\int_{\theta=0}^{2\pi} \Big/_0^1 \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\, d\theta \\
=\ &\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (5\sqrt{5} - 1)\, d\theta = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

6. γ on murtoviiva $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1) \to (0, 1) \to (0, 0)$. Laske käyräintegraali

$$\int_\gamma x^2y\, dx + 3xy^2\, dy$$

   käyttämällä Greenin lausetta.

Mallivastaus: Murtoviiva on yksikköneliön $[0,1]\times[0,1]$ reunakäyrä, joten Greenin lauseen perusteella kyseinen käyräintegraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
& \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(3y^2-x^2)\,dy\,dx \\
= & \int_{x=0}^{1} \Big/_{0}^{1} (y^3-x^2y)\,dx \\
= & \int_{x=0}^{1}(1-x^2)\,dx = \Big/_{0}^{1}(x-\frac{1}{3}x^3) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

7. Laske vektorikentän (x^2,y^2,x^2) pintaintegraali yli kappaleen $\{(x,y,z)\}\in[0,3]\times[-2,2]\times[0,2\pi]$. Ohje: Käytä divergenssilausetta.

   Mallivastaus: Jos merkitään $I=[0,3]\times[-2,2]\times[0,2\pi]$, on divergenssilauseen perusteella kysytty pintaintegraali on sama kuin integraali

$$
\begin{aligned}
& \int_I \nabla\cdot(x^2,y^2,x^2) = \int_I (2x+2y) \\
= & \int_{x=0}^{3}\int_{y=-2}^{2}\int_{z=0}^{2\pi}(2x+2y)\,dz\,dy\,dx \\
= & \ 2\pi\int_{x=0}^{3}\int_{y=-2}^{2}(2x+2y)\,dy\,dx \\
= & \ 2\pi\int_{x=0}^{3}\Big/_{-2}^{2}(2xy+y^2)\,dx \\
= & \ 2\pi\int_{x=0}^{3}8x\,dx = 2\pi\Big/_{0}^{3}4x^2 = 72\pi.
\end{aligned}
$$

8. Laske vektorikentän $(2x,y^2,z^2)$ pintaintegraali yli yksikköpallon $x^2+y^2+z^2=1$ pinnan. Ohje: Käytä divergenssilausetta.

   Mallivastaus: Divergenssilauseen mukaan pintaintegraali on sama kuin vektorikentän divergenssin yli kappaleen, siis

$$\int_B \nabla\cdot(2x,y^2,z^2) = \int_B (2+2y+2z),$$

missä B on yksikköpallo $\{x^2+y^2+z^2\le 1\}$. Tämän integraalin laskemiseksi hajotetaan integrandi osiin:

$$\int_B (2+2y+2z) = \int_B 2 + \int_B 2y + \int_B 2z.$$

Tarkastellaan ensin ensimmäistä integraalia, jossa integrandi on vakio. Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_B 2 = 2\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

koska yksikköpallon tilavuus on $\frac{4\pi}{3}$. Hajotetaan seuraava integraali kahden yksikköpallon puolikkaaksi $B_1=\{x^2+y^2+z^2\le 1 \mid y\le 0\}$ ja $B_2=\{x^2+y^2+z^2\le 1 \mid y\ge 0\}$ jolloin

$$\int_B 2y = \int_{B_1} 2y + \int_{B_2} 2y$$

ja sijoituksella jälkimmäiseen integraaliin $y = -y_1$ huomataan, että $\int_{B_1} 2y = -\int_{B_2} 2y$ (tarkista), siis funktion $2y$ integraali yli yksikköpallon on 0. Samoin voidaan huomata, että viimeisimmän integraalin arvo yli yksikköpallon on 0. Näin ollen tehtävässä kysytyn integraalin arvo on $\frac{8\pi}{3}$.

Tulkintaa: Jaettaessa yksikköpallo kahtia tason $y = 0$ halki saa funktio $2y$ täsmälleen vastakkaiset merkit kun $y > 0$ ja kun $y < 0$. Näin ollen vastaavat integraalit kumoavat toisensa.

9. Olkoon S origokeskinen r-säteinen ympyräpinta. Oletetaan, että origossa sijaitseva varaus on Q, jolloin Maxwellin yhtälöiden mukaan pitäisi olla

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

missä ϵ_0 on vakio ja $\boldsymbol{E}$ on sähkökenttä. Millainen on sähkökentän $\boldsymbol{E}$ lauseke?

Ohje: Integrandi $\boldsymbol{E}(r)$ on vakio, kun r on kiinteä etäisyys origosta. Integraalin arvo on tällöin pinnan ala kertaa $E(r)$ (missä $E(r)$ edustaa sähkökentän voimakkuuden itseisarvoa).

Mallivastaus: Kun integroitavaksi alueeksi valitaan origokeskinen r-säteinen pinta, jonka sisään varaus jää, on integraalin arvo laskettavissa seuraavasti:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_S \boldsymbol{E} \cdot dA = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dA,$$

missä $\boldsymbol{n}$ on r-säteisen pallonpinnan normaalivektori. Koska $E\boldsymbol{r}$ oletetaan etäisyydellä r vakioksi (merkitään $E(r)$), on viimeisin integraali yhtä suuri kuin pallon pinnan ala kertaa $E(r)$, siis

$$4\pi r^2 E(r).$$

Täten siis $\frac{Q}{\epsilon_0} = 2\pi r^2 E(r)$, josta $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$. Sähkökenttä siis suuntautuu kohtisuoraan pois varauksesta ja on itseisarvoltaan kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.