Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

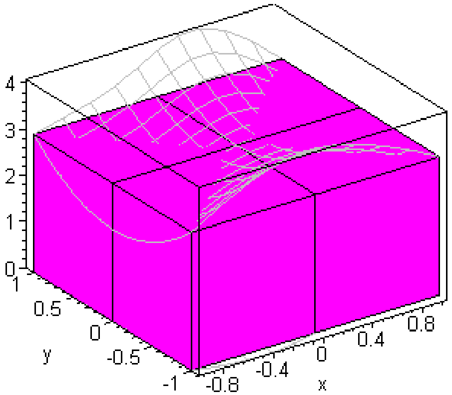
2025

Integraalilaskentaa

Lähtökohta: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ (kompakti) väli: $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_n, b_n]$.
- Geometrinen mitta $\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.
- Välin $[a_i, b_i]$ jako $D_i \to$ välin I jako $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ $(k = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n)$ kpl.
- Merkintä: $m_i = \inf_{\boldsymbol{x} \in I_i} f(\boldsymbol{x})$, $M_i = \sup_{\boldsymbol{x} \in I_i} f(\boldsymbol{x})$.
- Alasumma $\underline{S}_D = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i \mu(I_i)$
- Yläsumma $\overline{S}_D = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} M_i \mu(I_i)$.

Integraalilaskentaa



Riemann-integraali

Jos jakoa tihentämällä saadaan $\overline{S}_D - \underline{S}_D < \epsilon$ ja $\underline{S}_D \leq S \leq \overline{S}_D$ jokaiselle $\epsilon > 0$, sanotaan, että $f : I \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva ja merkitään

$$S = \int_I f = \int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Määritelmä

- Suorakulmaisille alueille (väleille) I integraali $\int_I f$ määritellään edellä kuvailtujen ylä- ja alasummien yhteisenä raja-arvona.
- Ei-suorakulmaisille alueille A määritellään

$$f_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{jos } \boldsymbol{x} \in A, \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

sekä valitsemalla jokin joukon A sisältävä suorakulmainen alue (väli) I ja määrittelemällä

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

Nollamittaisuus

Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on (Lebesgue-)nollamittainen jos se voidaan peittää numeroituvalla määrällä I_1, I_2, I_3, ... avaruuden $\mathbb{R}^n$ välejä, joiden yhteenlaskettu mitta saadaan miten lähelle nollaa hyvänsä.

Lause

Jos $m < n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ja $f : U \to \mathbb{R}^n$ on differentioituva, on $f(U)$ nollamittainen.
Esimerkit 32–33

Lause

Jos $I \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti väli ja $f_I \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin f on (Riemann)integroituva välin I yli tarkalleen silloin kun f:n epäjatkuvuuskohtien joukko on nollamittainen.