

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2026

## Fubinin lause

Olkoon  $I = I_1 \times I_2$ . Tällöin riittävän säännöllisyysoletuksin

$$\int_I f = \int_{I_1} \left( \int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

## Erikoistapaus

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$ , jolloin

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{I_2} f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

## Esimerkkejä

Esimerkit 34–37 Esimerkit 3.24, 3.26, 3.27 (J. Lahtonen)

## Sijoitus integraaliin

Jos  $f$  on reaalifunktio ja  $g$  sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että  $g(a) = \alpha$ ,  $g(b) = \beta$ , on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys ?