Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\,dx$$

Yleistys ?

Geometrinen luonnehdinta

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)|$$

on vektoreiden $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ määrittämän suuntaissärmiön tilavuus

Seuraus

Jos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus ja I jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli, on

$$\mu(T(I)) = |\det(T)|\, \mu(I).$$

Lineaarialgebran kurssilta

Seuraus

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen ja $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $I(\boldsymbol{x})$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli, jonka yksi kärkipiste on $\boldsymbol{a}$ ja toinen $\boldsymbol{x}$. Tällöin

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\mu(f(I(\boldsymbol{x})))}{\mu(I(\boldsymbol{x}))} = |\det(J_f(\boldsymbol{a}))|$$

Syy:

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \approx Df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$$

ja $J_f(\boldsymbol{a})$ on lineaarikuvauksen $Df(\boldsymbol{a})$ matriisi.

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\, dy = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\, dx$$

Yleistys: Jos $g : U \to V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_{V} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{U} f(g(\boldsymbol{x}))\, |\det(J_g(\boldsymbol{x}))|\; d\boldsymbol{x}$$

Sijoitus integraaliin

Esimerkkejä

Esimerkit 38, 39, 40, 42

Esimerkki

Esimerkki 3.37 (J. Lahtonen)

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

Käyrä on *sileä*, mikäli derivaatat $\gamma_i'(t)$ ovat jatkuvia.

Käyrän pituus

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$$

Käyrän pituus

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2}\, dt \end{aligned}$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 5.6 ja 5.7.