

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Käyrän pituus

$$\begin{aligned}L &= \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \\&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \\&= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt\end{aligned}$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 5.6 – 5.8.

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Vektorikentän käyräintegraali

Voimavektori \mathbf{F} , suuntavektori \mathbf{s} , projektion avulla työ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

Määritelmä

Olkoon $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä käyrä. Vektorikentän \mathbf{F} käyräintegraali käyrää γ pitkin määritellään

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Merkintä

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$$

Esimerkkejä

Esimerkit 44 ja 45, J. Lahtonen: Esim. 5.11

Ominaisuuksia

- $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$
- $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$
- $\int_{\gamma} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_{\gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}$

Määritelmä

Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on vektorikenttä ja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $\mathbf{f} = \nabla V$, sanotaan että V on vektorikentän *potentiaali*.

Tällöin sanotaan myös, että differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on *eksakti* ja että sen integraalifunktio on V .

Lause

Jos differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on eksakti ja sen potentiaali on V , sekä $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva käyrä, $\gamma(a) = \mathbf{a}$, $\gamma(b) = \mathbf{b}$, on

$$\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}).$$

Lause

Jos *tähtimäisessä* alueessa pätee $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, on vektorikentällä $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ potentiaali alueessa.

Esimerkkejä

Esim. 46–48

Skalaariarvoinen funktio

Merkitään $\mathbf{T} = \|\gamma'(t)\|^{-1}\gamma'(t)$ ja $ds = \|\gamma'(t)\|dt$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \|\gamma'(t)\| dt\end{aligned}$$

Jos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on skalaariarvoinen, määritellään

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Huomautus

Vakioarvoisen skalaarifunktion $f(\mathbf{x}) = 1$ käyräintegraali

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

on käyrän pituus.

Merkintä

Jos γ on suljettu käyrä, merkitään varsinkin fysiikan kirjallisuudessa

$$\int_{\gamma} f = \oint_{\gamma} f$$

Määritelmä

Pinta avaruudessa \mathbb{R}^3 on jatkuvan funktion kuva $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esimerkkejä

Esimerkit 49–52

Parametrimuoto

$$(u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

Huomautus

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$$

On vektoreiden \mathbf{x} ja \mathbf{y} generoimien suunnikkaan ala.