Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Pinta-ala

Määritelmä

Pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on jatkuvan funktion kuva $f : A \to \mathbb{R}^3$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esimerkkejä

Esimerkit 49–52

Parametrimuoto

$$(u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

Huomautus

$$||\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x}|| \, ||\boldsymbol{y}|| \sin\theta$$

On vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ generoimien suunnikkaan ala.

Pinta-ala

Parametrisoidun pinnan ala

Jos $\phi : E \to \mathbb{R}^3$ on pinnan S (injektiivinen) parametriesitys, on

$$A = \int_E dA = \int_E ||\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}||\, du\, dv$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 6.2. ja 6.3.

Huomautus

Jos pinta esitetään muodossa $z = f(x, y)$ tai $G(x, y, z) = 0$, on

$$\begin{aligned} dA &= ||\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial u}||\, du\, dv = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial z}} ||\nabla G||\, dx\, dy \end{aligned}$$

Pinta-ala

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ja $f : A \to \mathbb{R}^3$ sekä $S = \{\phi(u,v) \mid (u,v) \in A\}$ pinta avaruudessä $\mathbb{R}^3$. Integraalia

$$\iint_{(u,v)\in A} f(\phi(u,v)) || \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} || \, du \, dv$$

sanotaan skalaarifunktion f integraaliksi yli pinnan S

Pintaintegraali

Määritelmä

Vektorikentän $\boldsymbol{f}$ integraali yli pinnan tarkoittaa vektorikentän kohtisuoran komponentin (skalaari) integroimista yli pinnan.

Pintaintegraali:

$$\iint_{(u,v)\in A} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \, dA,$$

missä $\boldsymbol{n}$ on pinnan (yksikkö)normaalivektori.
Parametrimuodossa tämä voidaan kirjoittaa

$$\iint_{(u,v)\in A} \boldsymbol{f}(\phi(u,v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \, du \, dv$$

Vertailu

Käyräintegraali (skalaarifunktio)

$$\int_a^b f\,ds = \int_a^b f(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Pintaintegraali (skalaarifunktio)

$$\int_a^b \int_c^d f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(u,v)||\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}||\,du\,dv$$

Vertailu

Käyräintegraali (vektorikenttä)

$$\int_a^b f\, ds = \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Pintaintegraali (vektorikenttä)

$$\int_a^b \int_c^d f\, dA = \int_a^b \int_c^d \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} || \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} ||\, du\, dv$$

Stokesin lauseen muotoja

Greenin lause

Greenin lause tasossa:

$$\iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial A} f_1\, dx + f_2\, dy$$

Abstrakti Stokesin lause

$$\int_{\partial A} f = \int_A df$$

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_{\partial A} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}$$

Nabla-merkinnät

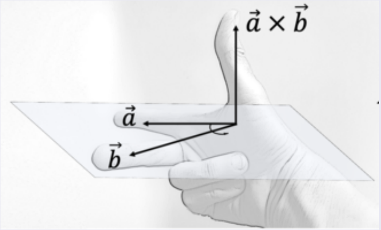
Olkoon $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ja $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (f_1, f_2, f_3)$. Tällöin ajatellaan Nabla-operaattorin $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ avulla määriteltävän

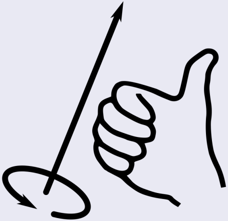
- Gradientti: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$
- Divergenssi: $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3$
- Pyörre (=curl ("Roottori")):

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{f} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Vektorianalyysiä

Oikean käden sääntö





Stokesin lauseen muotoja

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_{\partial A} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}$$

Greenin lause

Jos pinta rajoittuu xy-tasolle, saadaan klassisesta Stokesin lauseesta

$$\iint_A (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})\, dx\, dy = \int_{\partial A} f_1\, dx + f_2\, dy$$

Gaussin lause eli divergenssilause

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Divergenssilauseen tulkintaa

Divergenssilause

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Tulkintaa

Jos $\nabla \cdot \boldsymbol{f}$ on jatkuva, on pienessä tilavuudessa V likimain vakio, siis

$$V \nabla \cdot \boldsymbol{f} \approx \iint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Näin ollen divergenssi $\nabla \cdot \boldsymbol{f}$ edustaa (skaalattuna) vektorikentän $\boldsymbol{f}$ integraalia pinnan ∂V läpi ("vektorikentän lähde")

Klassisen Stokesin lauseen tulkintaa

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_{\partial A} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}$$

Tulkintaa

Jos $\nabla \times \boldsymbol{f}$ on jatkuva, on niinikään

$$\iint_A \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dA \approx A(\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n},$$

mutta samalla ylläolevan yhtälön mukaan kyseessä on (skaalattu) vektorikentän (normaalikomponentin) käyräintegraali alueen A reunan ympäri. Tämän vuoksi $\nabla \times \boldsymbol{f}$ katsotaan edustavan vektorikentän $\boldsymbol{f}$ *pyörteisyyttä*.

Vektorianalyysiä

Maxwellin yhtälöt

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})
\end{aligned}
$$

Selostusta

E on sähkökenttä, ρ varaustiheys, **B** on magneettikenttä, **J** on sähkövirran tiheys, ϵ_0 ja μ_0 ovat vakioita (tyhjiön permittiivisyys ja tyhjiön permeabiliteetti)

Vektorianalyysiä

Maxwellin yhtälöt

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV \\
\iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{n} &= 0 \\
\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{s} &= -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{n} \\
\int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{x} &= \mu_0 \left(\iint_A \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{n} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{n} \right)
\end{aligned}
$$

Selostusta

E on sähkökenttä, ρ varaustiheys, **B** on magneettikenttä, **J** on sähkövirran tiheys, ϵ_0 ja μ_0 ovat vakioita (tyhjiön permittiivisyys ja tyhjiön permeabiliteetti)