

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2026

Demonstraatio 1, 1.10.2026

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ja laskimia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Olkoon $f(x) = 3x - 2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(4))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 4)$. Miten $d(f(x), f(4))$ ja $d(x, 4)$ suhtautuvat toisiinsa?
2. Olkoon $f(x) = 3x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(4))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 4)$. Jos vielä rajoitetaan muuttujaa x siten, että $x \in (3, 5)$, miten $d(x, 4)$ silloin rajoittaa etäisyyttä $d(f(x), f(4))$?
3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (3, 5)$ tiukennetaan muotoon $x \in (3.9, 4.1)$, miten $d(x, 4)$ silloin rajoittaa etäisyyttä $d(f(x), f(4))$?
4. Jos x on lähellä lukua 3, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{3}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 3)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.
5. Osoita, että $x^3 - 20x^2 - 3x + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.

Vihje: Luento-esimerkki. Kunhan $x > 1$, on $x^3 > x^2 > x$ ja $x^3 - 20x^2 - 3x + 1 > x^3(1 - \frac{23}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{23}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?

6. Selvitä miten $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ käyttäytyy kun $x \rightarrow 2$. Onko mahdollisesti raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

olemassa?

7. Sievennä seuraava lauseke, kun $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Mitä arvoa lauseke näyttää lähestyvän, kun $x \rightarrow 3$?

8. Sievennä seuraava lauseke, kun $x \neq 3$:

$$\frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

Mitä arvoa lauseke näyttää lähestyvän, kun $x \rightarrow 3$?

9. Sievennä seuraava lauseke, kun $x \neq 3$:

$$\frac{(x - 3)^2}{x^2 - 9}.$$

Mitä arvoa lauseke näyttää lähestyvän kun $x \rightarrow 3$?

10. Miten lauseke

$$\frac{x - 2}{x^2 - 9}$$

näyttää käyttäytyvän, kun $x \rightarrow 3$?

11. Miten lauseke

$$\frac{3-x}{(x-3)^2}$$

näyttää käyttäytyvän, kun $x \rightarrow 3$?

12. Voidaanko $f(x) = \frac{3-x}{x^2-9}$ määritellä pisteessä $x = 3$ siten, että siitä tulisi jatkuva?

13. Voidaanko $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$ määritellä pisteessä $x = 3$ siten, että siitä tulisi jatkuva?