

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2026

Demonstraatio 2, 8.10.2026

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4$.

Mallivastaus: Derivoidaan termeittäin:

$$f'(x) = 6x^2 + 8x.$$

2. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = (5x + 2)(4x - 5)$.

Mallivastaus:

Tulon derivointisäännöllä

$$f'(x) = 5(4x - 5) + 4(5x + 2) = 20x - 25 + 20x + 8 = 40x - 17.$$

3. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = \frac{2x-5}{6x+1}$.

Mallivastaus:

Osamäärän derivointisäännöllä

$$f'(x) = \frac{2(6x+1) - 6(2x-5)}{(6x+1)^2} = \frac{12x+2-12x+30}{(6x+1)^2} = \frac{32}{(6x+1)^2}.$$

4. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = (5x - 1)^5$.

Mallivastaus:

Ketjusäännöllä

$$f'(x) = 5(5x - 1)^4 \cdot 5 = 25(5x - 1)^4.$$

5. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Mallivastaus: Funktio on määritelty vain, kun $x \geq 0$. Kirjoitetaan $f(x) = x^{1/5}$. Potenssifunktion derivointisäännöllä saadaan

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}}, \quad x > 0.$$

Derivaatan määrittelevä lauseke ei ole määritelty, kun $x = 0$ ja yksityiskohdainen tarkastelu (ei tehdä tässä yhteydessä), että funktio ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

6. Tässä ja seuraavassa tehtävässä voidaan olettaa tunnetuksi, että raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ei ole olemassa (mieti miksi). Selvitä missä funktio $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on derivoituva ja määritä derivaattafunktio.

Mallivastaus: Kun $x \neq 0$, saadaan tulon derivointisäännöllä

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{x}.$$

Pisteessä $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

Tätä raja-arvoa ei ole olemassa. Siis funktio on derivoituva täsmälleen pisteissä $x \neq 0$ ja tällöin

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{x}.$$

7. Selvitä missä funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on derivoituva ja määritä derivaattafunktio.

Mallivastaus:

Kun $x \neq 0$, on

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Pisteessä 0 on

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Perustelu: $d(h \sin \frac{1}{h}, 0) = |h \sin \frac{1}{h}| \leq |h| = d(h, 0)$. Siis funktio on derivoituva kaikkialla ja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Olkoon $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 5$. Laske $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Mallivastaus:

$$f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 5.$$

Ensin

$$\frac{\partial}{\partial x} f = 2xy + 2y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y} f = x^2 + 4xy + 9y^2.$$

Tästä

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 2y, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 4x + 18y,$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 2x + 4y, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = 2x + 4y.$$

9. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Määritä $f^{(n)}(x)$ kun $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Mallivastaus:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{(1-x)^6}.$$

10. Yhtälö $e^{xy} \ln \frac{x}{y} = x + \frac{1}{y}$ määrittelee jossakin pisteen $(e, \frac{1}{e})$ ympäristössä funktion f . Laske $f'(e)$.

Mallivastaus:

Implisiittinen derivointi tuottaa yhtälön

$$e^{xy}(y + xy') \ln \frac{x}{y} + e^{xy} \frac{y}{x} \frac{y - xy'}{y^2} = 1 - \frac{1}{y^2} y'$$

johon sijoittamalla $(x, y) = (e, \frac{1}{e})$ saadaan $f'(e) = -\frac{1}{e^2}$.

11. Olkoon $A = \{(2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t) \mid t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sopivasti pisteen $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ ympäristöön rajoittautumalla A :sta saadaan funktio f . Laske $f'(\sqrt{2})$.

Mallivastaus:

Parametriesitys on

$$x(t) = 2 \cos t - \cos 2t, \quad y(t) = 2 \sin t - \sin 2t.$$

Piste

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$$

saavutetaan, kun

$$t = \frac{\pi}{4}.$$

(miksi?) Derivoimalla saadaan

$$x'(t) = -2 \sin t + 2 \sin 2t,$$

$$y'(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t.$$

Siten

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

12. Osoita, että $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 1$ on bijektio ja määritä $(f^{-1})'(4)$.
Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. On selvitettävä sellainen x , jolla $f(x) = 4$ (miksi?) Kokeile joitain pieniä lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.

Mallivastaus:

Koska

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, funktio on aidosti kasvava ja siten injektio. Lisäksi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

joten f on surjektio. Siis f on bijektio. Ratkaistaan

$$f(x) = 4.$$

Saadaan

$$x^3 + 2x + 1 = 4$$

ja helposti nähdään että $x = 1$. Käänteisfunktion derivointisäännöstä

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}.$$

13. Määritä $\int x^2 \ln x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi.

Mallivastaus:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \int \frac{d}{dx} \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx.$$

Tästä seuraa

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$