

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2026

Demonstraatio 3, 15.10.2026

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Määritä $\int (x^3 + 2x^2 - 4x + 6) dx$.
2. Määritä $\int \sin(3x + 2) dx$.
3. Määritä $\int \frac{x}{3x^2 + 2} dx$.
4. Määritä $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$.
5. Määritä $\int e^{-3x} dx$.
6. Määritä $\int \tan x dx$. Ohje: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Mieti miten osoittaja saadaan nimittäjästä differentiaalilaskennan keinoin.
7. Määritä $\int \sin^2 x dx$ käyttämättä kaksinkertaisen kulman trigonometrista kaavaa. Sen sijaan osittaisintegrooi ja sovello kaavaa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ratkaise kysytty integraali näin saadusta yhtälöstä.
8. Määritä $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$ sopivalla sijoituksella. Vihje: Mahtaisiko $x = 3 \sin t$ toimia?
9. Määritä $\int \sqrt{\frac{x}{1 - x^3}} dx$. Vihje: Mahtaisiko $x = t^{\frac{2}{3}}$ toimia?
10. Määritä $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$. Ohje: Etsi lausekkeelle $\frac{1}{x^2 + x - 2}$ osamurtohajotelma luentoesimerkin mukaisesti.
11. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = 2x^2 - x$$

alkuehdolla $y(0) = 2$.

12. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y''(x) = \cos x - x$$

alkuehdoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

13. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y(x)^2 y'(x) = 2x + 1$$

alkuehdolla $y(0) = 1$. Ohje: Luentoesimerkki.

14. Selvitä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$ lokaalit ääriarvot sekä missä f on vähenevä ja missä kasvava. Ohje: Tämän tyyppistä tehtävää ei ole käsitelty luennolla, mutta se on tyypillinen lukiomatematiikalle ja luentomonisteesta löytyy vastaava esimerkki,
15. Löydöksen ikä ajoitetaan kaavalla $T(x) = -k \ln x$, missä $k = 8267$ ja $x = \frac{N}{N_0}$ on jäljellä olevien hiili-14 ytimien osuus. Esitä lineaarinen arvio ajoitusvirheelle kun oikea arvo $x = 0,75$ on mitattu väärin arvoksi $x + \Delta x$. Kuinka suuri suuri ajoitusvirhe arvion perusteella korkeintaan on, kun $|\Delta x| \leq 0,02$?

16. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden massallisen kappaleen välillä vallitsee vetovoima, joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Verrannollisuuskerrointa G kutsutaan gravitaatiovakioksi. Pallomaisten kappaleiden yhteydessä etäisyys lasketaan pallon keskipisteestä.

Selvitä luennolla/luentomonisteessa esitetyllä likimääräismenetelmällä kuinka monta prosenttia avaruusasemalla vallitseva gravitaatiovoima on maan pinnalla vaikuttavasta? Maan säde on n. 6400 km ja avaruusasema kiertää maata n. 360 km korkeudella. Ohje: avaruusaseman kiertokorkeutta voidaan ajatella muutoksena Δr maan säteeseen r . Mikä on siis $(F + \Delta F)/F$ likimain?

17. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos^2 x - 8 \cos x + 4 - x^4}{e^{x^3} - 1 - x^3}$$

l'Hospitalin säännöllä.

18. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x}$$

l'Hospitalin säännöllä.