

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2026

Demonstraatio 4, 22.10.2026

Huom: Vastaukset pitää löytää ilman matematiikkaohjelmia, ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Etsi funktion $f(x) = \cos x$ kolmannen asteen Taylorin polynomi pisteessä $x = \frac{\pi}{3}$. Arvioi myös virhetermin (jäännöstermin) suuruutta Taylorin kehitelmässä.
2. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{1}{3-x}$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi käyttämällä tunnettua kehitelmää

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + O(t^4) \quad \text{kun } t \rightarrow 0$$

kahdella eri tavalla:

1) Kirjoita

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-2)}$$

ja sovelta tunnettua kehitelmää arvolla $t = x - 2$.

2) Kirjoita

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

ja sovelta tunnettua kehitelmää arvolla $t = \frac{x}{3}$. Kumpi näistä tavoista tuottaa funktion $f(x)$ "oikean" Taylorin polynomin?

3. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ astetta 4 oleva Maclaurinin polynomi. Laadi arvio virhetermille, kun oletetaan, että $|x| \leq 1$. Ohje: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$. Funktiolla $f(t) = \frac{1}{1-t}$ Maclaurinin polynomit ovat tunnettuja (vrt. edellinen tehtävä).
4. Muista, että $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. Vertaa taulukosta löytyvää funktion $\arctan$ Maclaurinin polynomia ja edellisen tehtävän maclaurinin polynomin antiderivaattaa. Mitä voit havaita?
5. Selvitä ilman taulukkoja, miltä näyttää funktion $f(x) = \ln(1+x)$ astetta 4 oleva Maclaurinin polynomi suoraan derivaattoja laskemalla. Laadi arvio virhetermille, kun oletetaan, että $|x| \leq \frac{1}{2}$.
6. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{1}{x^2-x+2}$ viidettä astetta oleva Maclaurinin polynomi ja laske sen perusteella $f^{(5)}(0)$. Ohje: Voit käyttää osamurtohajotelmaa.
7. Selvitä mikä on $f^{(20)}(0)$, kun $f(x) = \frac{1}{1+2x^4}$. Ohje: Kirjoita funktion Maclaurinin polynomi käyttämällä Σ -merkintää, ja ratkaise vaadittu arvo.
8. Etsi funktion $f(x) = e^x$ neljännen asteen Taylorin polynomi pisteessä $x = \ln 2$. Esitä jäännöstermille jokin arvio, joka pätee kun $d(x, \ln 2) < 1$.
9. Olkoon $f(x) = x + \sin x$. Selvitä onko a) $f(x) = O(x^2)$, kun $x \rightarrow \infty$ b) $f(x) = O(x^2)$, kun $x \rightarrow 0$. c) $f(x) = O(x)$, kun $x \rightarrow 0$, d) $f(x) = O(x)$, kun $x \rightarrow \infty$.

10. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$$

Taylorin polynomien avulla.

11. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x(\cos x - 1)}$$

Taylorin polynomien avulla

12. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^6 - 3x^7 - 5x^8}{e^{x^3} - 1 - x^3}.$$

Taylorin polynomien avulla

13. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

Ohje: Käytä Maclaurinin polynomeja arvioidaksesi funktion $x \rightarrow e^x$ käyttäytymistä kun $x \rightarrow 0$. Sijoita $y = \frac{1}{x}$ ja selvitä miten luku y käyttäytyy, kun $x \rightarrow \infty$.

14. Valitaan tarkasteluväliksi $[0, 1]$ ja funktioksi $f(x) = e^x$. Valitaan lisäksi välin $[0, 1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

15. Selvitä integraalin $\int_0^1 e^x dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Vihje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \rightarrow \infty$.