

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2026

Demonstraatio 5, 29.10.2026

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Laske $F'(x)$ kun

a) $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt$ b) $F(x) = \int_{-4}^{5x} e^{-t^2} dt$ c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt$

Vihje: Luentoexamplesimerkki.

2. Laske $\int_1^3 (8x^3 - 3x^2 - 2x + 2) dx$.

3. Laske $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

4. Laske $\int_1^4 (8x+12)(x^2+3x+1)^3 dx$.

5. Laske $\int_0^\pi \sin x \cos x dx$.

6. Laske $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

7. Laske $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

8. Laske a) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ b) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ c) $\int_0^{2\pi} |\sin x|^2 dx$

9. Laske

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$$

Vihje: Käytä sijoitusta $x = 3 \sin t$

10. $\int_1^e x^3 (\ln x)^2 dx$

Vihje: Käytä osittaisintegrointia.

11. Määritellään $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $x \in [1, M]$, missä $M > 1$ ja tarkastellaan pyörähdyskappaletta, joka muodostuu, kun käyrä $f(x) = \frac{1}{x}$ pyörähtää x -akselin ympäri. Laske välillä $[1, M]$ syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus, ja kirjoita integraalilauseke kappaleen vaipan pinta-alalle (tarkoittaa pinta-alaa ilman päätyjä). Vihje: Luento 20.10.

12. Miten edellisen tehtävän kappaleen tilavuus käyttäytyy, kun $M \rightarrow \infty$? Arvioi kappaleen vaipan pinta-alaa esittävää integraalilauseketta sopivasti alaspäin, ja esitä pinta-alalle alaraja-arvio. Miten alaraja käyttäytyy, kun $M \rightarrow \infty$? Vihje: Jos pinta-alan esittävä integraalilauseke on määritetty oikein, siinä esiintyy juurilauseke

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq 1.$$

13. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat M ja m , etäisyys s) välinen voima on $F = G \frac{Mm}{s^2}$, missä G on gravitaatiovakio ja etäisyys s tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

Tarkastellaan tilannetta, jossa toinen kappaleista on maapallo (massa M , säde R) ja toinen pieni kappale (massa m), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle h . Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta R arvoon $R + h$. Ilmanvastusta ei huomioida. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo.

Oletetaan lopuksi että h on hyvin pieni R :n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle C jos käytät arvoja $G = 6.6734 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3 \text{ m}$. Vihje: Luento 20.10.

14. Olkoot merkinnät kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan, että kappale nostetaan korkeudelle $h = 3R$ (R on maan säde). Laske tehty työ sekä integraalilausekkeella että approksimoivalla lausekkeella ja vertaa tuloksia keskenään.
15. Kun valitaan aikayksikkö sopivasti, voidaan vaihtovirran jännitettä kuvata lausekkeella $u(t) = \hat{u} \sin t$, missä $\hat{u} > 0$ on vaihtovirran maksimijännite. Sähkövirran teho on $p = u \cdot i$, missä i on sähkövirta, joka puolestaan voidaan esittää jännitteen avulla, kun resistanssi R on tunnettu: $i = \frac{u}{R}$.

Laske sähkövirran keskimääräinen teho yli aikavälin $[0, 2\pi]$ ja selvitä miten $\hat{u}$ pitää valita, jotta vaihtovirran keskimääräinen teho vastaisi 230 V tasavirran tehoa. Tasavirran teho määritetään niinikään kaavalla $P = U \cdot I$, missä U on jännite ja $I = \frac{U}{R}$ virta.

Vihje: $p = u \cdot i = \frac{u^2}{R}$. Sijoita tähän jännitteen u lauseke ja käytä keskiarvon laskemiseksi integraalilla kaavaa $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Jatkuvan suureen keskiarvoa varten kts. luento 20.10.

16. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$$

ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$$

Vihje: Antiderivaattojen etsimiseksi sijoitus $x = e^t$ voi olla käyttökelpoinen. Sen avulla lieene mahdollista määrittää integraalien arvot, kun ylärajana on M .

17. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättelä niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{x^2 + 1}{2x^3 + x + 2} dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{5x + 1}{x^2 \sqrt{x} + 2x + 3} dx.$$

Ohje: Supista vertailufunktiota varten sellaisella x :n potenssilla, että osoittajassa korkeimmaksi jää x^0 ja arvioi mikä nimittäjässä jää korkeimmaksi potenssiksi.