

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

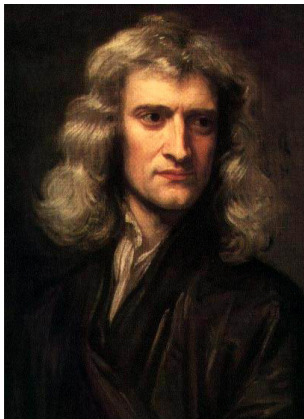


Arkhimedes (n. 287–212 eKr)

Määritti pinta-aloja ja tilavuuksia itse kehittämänsä varhaisen integraalilaskennan avulla



René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650)
Geometrian ja algebran yhdistäminen.



Sir Isaac Newton (1642–1727)

Differentiaali- ja integraalilaskenta fysiikkaa varten



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Differentiaali- ja integraalilaskenta "periaatteen vuoksi"



Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
Differentiaali- ja integraalilaskennan modernisointi

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys
- Maailmankuvan kehitys

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y , mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y , jos x valitaan läheltä lukua x_0 .

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10.

Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:

$$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2|x - 5| = 2d(x, 5).$$

Jos nyt valitaan x niin läheltä lukua 5 että $d(x, 5) < \frac{1}{2}\varepsilon$, seuraa tästä että $d(f(x), 10) = 2d(x, 5) < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tämä merkitsee sitä että $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua 10 kuin halutaan: Etäisyys $< \varepsilon$ kunhan x :n etäisyys luvusta 5 valitaan pienemmäksi kuin $< \frac{1}{2}\varepsilon$.

"Määritelmä 2"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y , mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat *mielivaltaisen* lähelle lukua y , jos x valitaan *riittävän* läheltä lukua x_0 .

Huomautus

Attribuutti "läheltä" tarkoittaa sitä, etäisyys $d(f(x), y)$ tai $d(x, x_0)$ on pieni. "Mielivaltaisen läheltä" voidaan puolestaan ilmaista sanomalla, että kaikille $\varepsilon > 0$, etäisyys $d(f(x), y)$ toteuttaa $d(f(x), y) < \varepsilon$, kunhan x on riittävän lähellä lukua x_0 , (siis kunhan $d(x, x_0)$ on riittävän pieni).

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ (*avoin*) ympäristö on avoin väli (a, b) , joka sisältää pisteen x_0 .

Raja-arvo

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon).$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$.

Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$.

Lause

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
- Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \rightarrow y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 3} &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$$

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.

Toisaalta, jos $x < 2$ voidaan kirjoittaa $x = 2 - \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{\epsilon} < 0$ ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä pienempi on $-\frac{1}{\epsilon}$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \rightarrow f(x) > M)$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.

Jos olisi (∞) , pitäisi olla $\frac{1}{x-2} > 100$ aina, kun $d(x, 2) < \delta_{100}$. Näin ei voi olla, sillä arvoilla $x < 2$ on $\frac{1}{x-2} < 0$.