

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I , niin $f'(x) = 0$ välillä I .

Lause

Jos $f(x) = \frac{1}{x}$, niin $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ kun $x \neq 0$.

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$.
Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Lause: Osamäärän derivaatta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.

Jos $k > 0$, on

$$\begin{aligned}(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k - x^k \\&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k \\&= kx^{k-1}h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \dots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.\end{aligned}$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I , derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x.$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx} x^\alpha?$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$