

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Sijoitus määräämättömään integraaliin

Jos F on f :n antiderivaatta, on

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

josta

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)).$$

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x) dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkki

$$\int \frac{1}{(5 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad x = \sqrt{5} \sin t.$$

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx?$$

Derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)^n} = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Esimerkki

$$\int \frac{4x + 3}{(2x^2 + 3x - 1)^2} dx = -\frac{1}{2x^2 + 3x - 1} + C$$

Esimerkki

$$\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \dots, \dots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x) dx + C.$$

Vakio C määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon) $y(0) = y_0$ perusteella.

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = C$$