

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = C$$

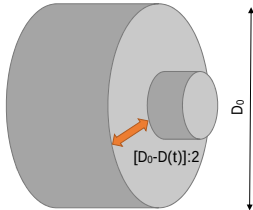
ODE to machining

Tool is moving perpendicular to the workpiece (grooving) with constant surface speed, so that the rotation speed of the workpiece increases to compensate the diameter change.

Diameter at the beginning of cutting is D_0 , constant surface speed is v_c , and feed is f .

- Calculate the diameter D of the workpiece as a function of time.
- How long does it take to cut through the whole workpiece, when cutting parameters are:

$v_c=140$ m/min, $f=0.4$ mm/rev, $D_0=119$ mm



Solution:

Feed speed is feed multiplied with rotation speed:

$$v_f(t) = f\omega(t)$$

Rotation speed is cutting speed divided with circumference:

$$\omega(t) = \frac{v_c}{\pi D(t)}$$

$$D(t) = D_0 - \int_0^t 2f\omega(\tau) d\tau$$

$$D(t) = D_0 - \int_0^t 2f \frac{v_c}{\pi D(\tau)} d\tau$$

$$\frac{d}{dt} D(t) = -2f v_c \frac{1}{\pi} \frac{1}{D(t)}$$

$$\dot{D}(t) D(t) = -2f v_c \frac{1}{\pi} = C$$

Integration by parts $\int uv = uv - \int u'v$

$$\int D \dot{D} = D^2 - \int D \dot{D}$$

From above, we know that $D \dot{D} = C$

$$\int D \dot{D} = D^2 - \int C$$

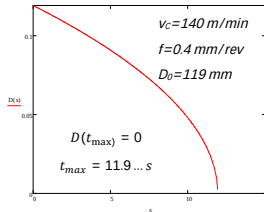
$$\int D \dot{D} = \int C = Ct + k$$

$$Ct + k = D^2 - (Ct + k)$$

$$D(t) = \sqrt{2k + 2Ct}$$

$$D(0) = D_0 = \sqrt{2k} \rightarrow k = D_0^2/2$$

$$D(t) = \sqrt{D_0^2 - 4f v_c \frac{1}{\pi} t}$$



Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) , niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Integraalilaskennan (antiderivaattojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I .

Todistus

Jos $a, x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I , niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I .

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ , jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. □

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nolleksiksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.
- Yksikköympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x + h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x + \Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Esimerkki

Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Paljonko kasvaa tilavuus?

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I , että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Huomautus

Jos f on derivoituva, on Rollen lauseen todistuksen perusteella ääriarvopisteissä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$.

Huomautus

Voidaan todistaa: Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, on x_0 lokaali maksimi. Jos taas $f''(x_0) > 0$, on x_0 lokaali minimi. Jos taas $f''(x_0) = 0$, ei x_0 välttämättä ole ääriarvopiste, vaan voi olla ns. satulapiste.

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

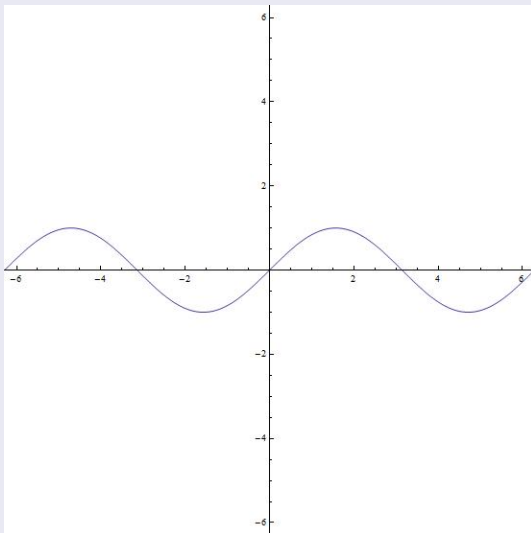
Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots + c_n h^n$$

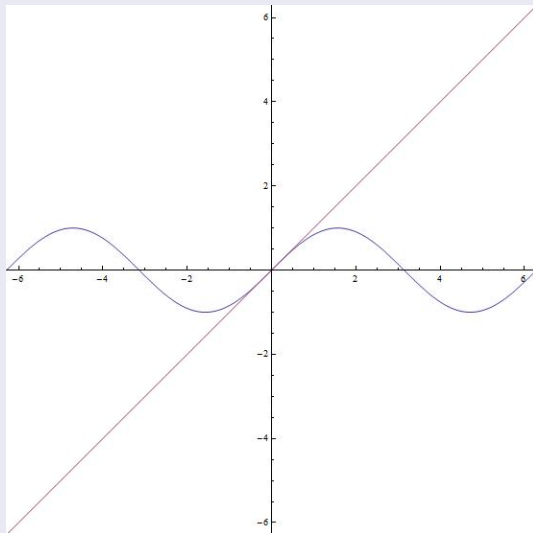
Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots + c_n h^n$$

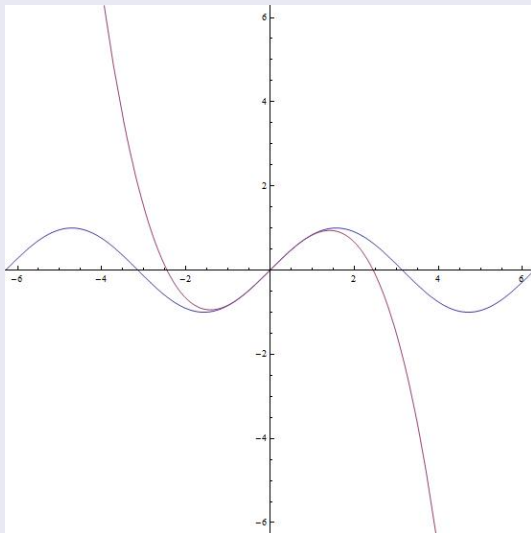
Sinifunktion approksimaatioita



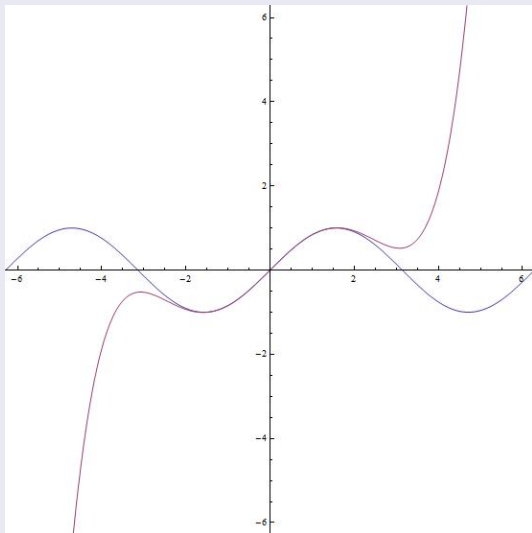
Sinifunktion approksimaatioita



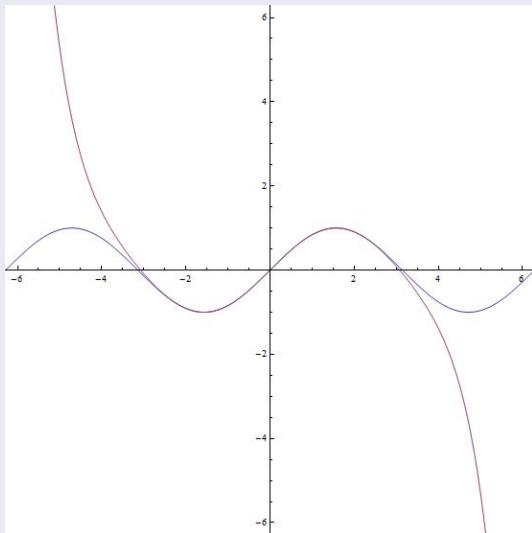
Sinifunktion approksimaatioita



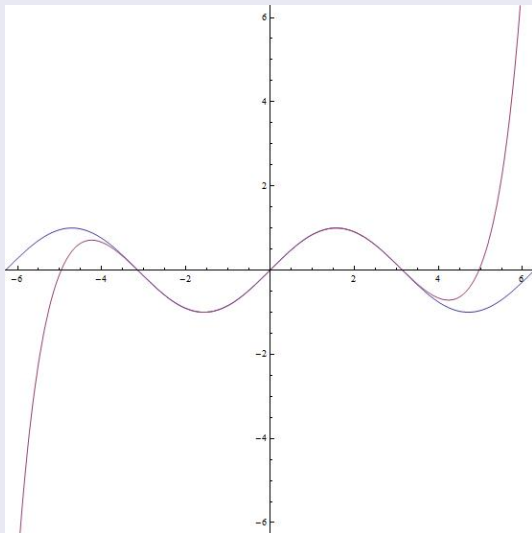
Sinifunktion approksimaatioita



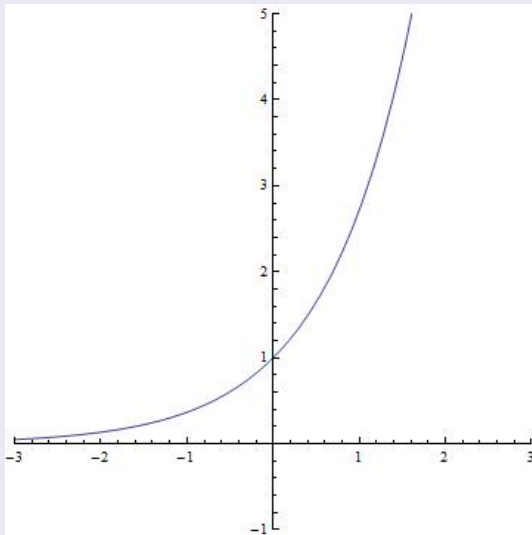
Sinifunktion approksimaatioita



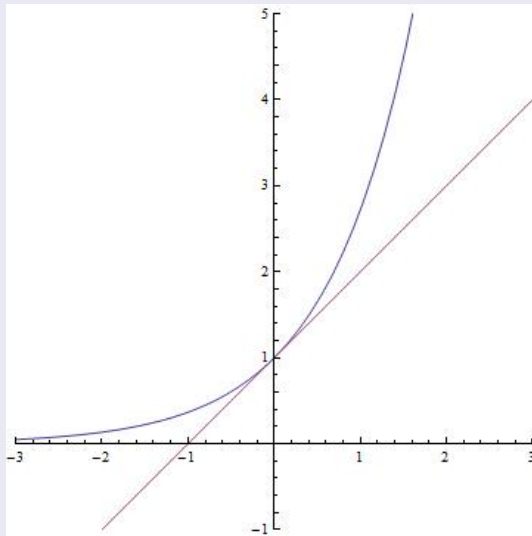
Sinifunktion approksimaatioita



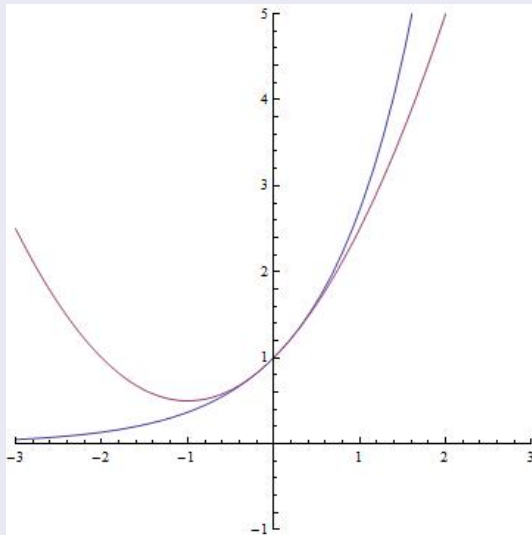
Eksponttifunktion approksimaatioita



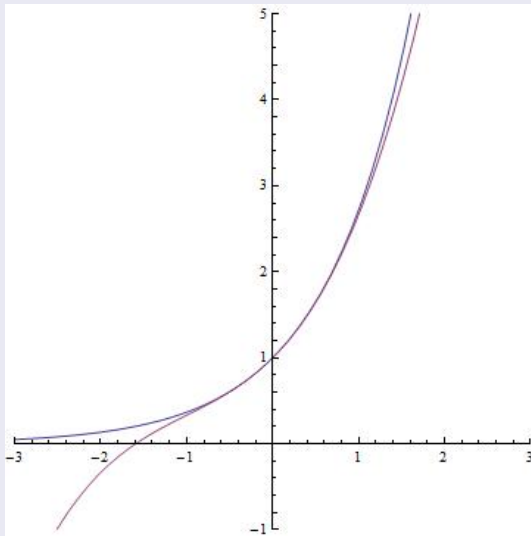
Eksponttifunktion approksimaatioita



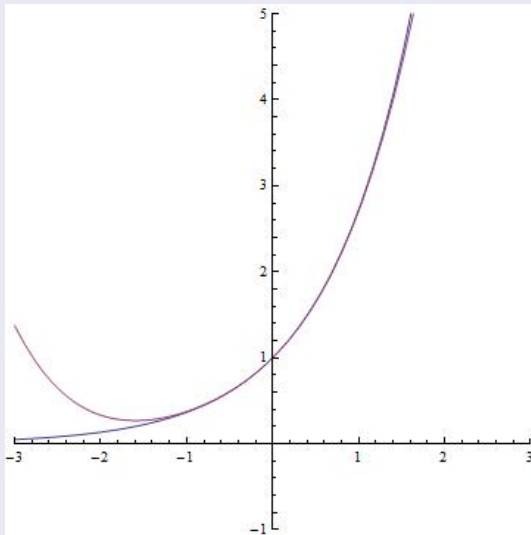
Eksponttifunktion approksimaatioita



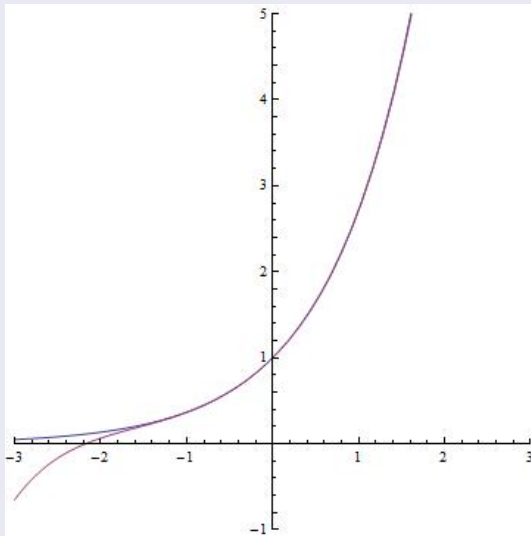
Eksponttifunktion approksimaatioita



Eksponttifunktion approksimaatioita



Eksponttifunktion approksimaatioita



Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots,$$

miten määritetään $c_0, c_1, c_2, \dots$? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + 5c_5h^4 + \dots,$$

johon sijoittamalla $h=0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h=0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4h + 60c_5h^2 + 120c_6h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'''(x) = 6c_3$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x + h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_n h^n + \dots$$

derivoidaan n kertaa h :n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x + h) = n!c_n + (n + 1)!c_{n+1}h + \dots$$

Sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

josta

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$