

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots,$$

miten määritetään $c_0, c_1, c_2, \dots$? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + 5c_5h^4 + \dots,$$

johon sijoittamalla $h=0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h=0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4h + 60c_5h^2 + 120c_6h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'''(x) = 6c_3$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x + h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_n h^n + \dots$$

derivoidaan n kertaa h :n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x + h) = n!c_n + (n + 1)!c_{n+1}h + \dots$$

Sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

josta

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Määritelmä

Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä x derivaatat n :nteen kertalukuun asti. Funktion f n :nen asteen Taylorin polynomi pisteessä x on

$$P_n(h) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

Jos $x = 0$, polynomia $P_n(h)$ kutsutaan myös Maclaurinin polynomiksi.

Lause

Jos funktio f on $n + 1$ kertaa derivoituva pisteessä x , on

$$f(x + h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x + h)$ (tai $\xi \in (x + h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion f Taylorin kehitelmäksi pisteessä x . Jos $x = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Huomautus

Merkitsemällä x :n paikalle x_0 ja h :n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.

Jos $x_0 = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Esimerkkejä

- Eksponenttifunktion Taylorin polynomit pisteessä $x = 0$
- Esimerkit: $\sin x$, $(1 + x)^\alpha$.

Huomautus

- Derivaattojen f' , f'' , f''' , ... määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.
- Poikkeuksia: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, ...
- Useimmiten kannattaa turvautua tunnettuihin Taylorin polynomeihin, niiden yhdistämisiin ja sijoituksiin.

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K |g(x)|,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \rightarrow x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$.

Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞) .

Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa

$$f(x) - g(x) = O(h(x)).$$

Lause

Jos $f^{(n+1)}(x)$ on jatkuva jossain pisteen x avoimessa ympäristössä ja $P_n(h)$ f :n Taylorin polynomi, niin

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \rightarrow 0$$

Huomautus

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$, kun $x \rightarrow 0$,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$, kun $x \rightarrow 0$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$, kun $x \rightarrow 0$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
- $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$, kun $x \rightarrow 0$.

Ordo-merkintöjen laskusääntöjä

Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalilukuja. Tällöin

- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, jos $x \rightarrow 0$
- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, jos $x \rightarrow \infty$
- $cO(f(x)) = O(f(x))$, kun $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $x^{-m} O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
- $f(x) = O(x^{n+m}) \Rightarrow f(x) = O(x^n)$, jos $x \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Taylorin polynomit

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(h)$ jolle
 $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \rightarrow 0$, niin $Q(h)$ on funktion f
Taylorin polynomi pisteessä x .

Esimerkki

Koska

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5), \quad \text{kun } x \rightarrow 0,$$

on

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4}{24} + O\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

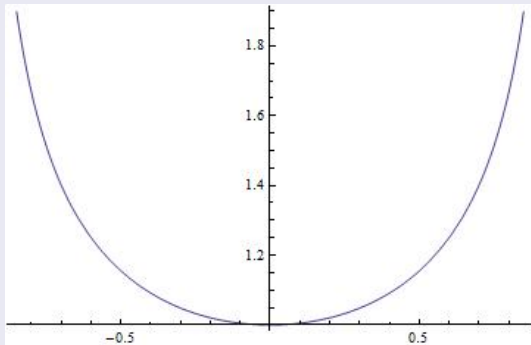
Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \rightarrow 0,$$

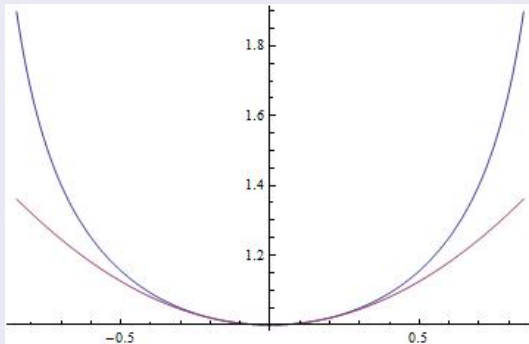
joten (sij. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $x = -t^2$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + O(t^6), \quad \text{kun } t \rightarrow 0.$$

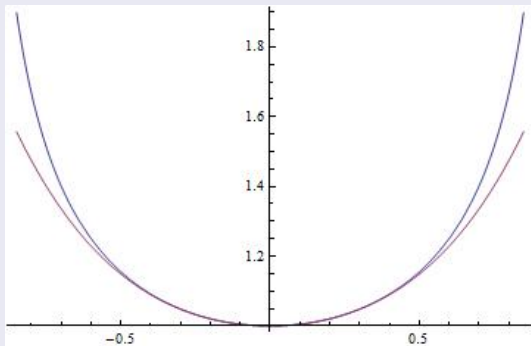
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



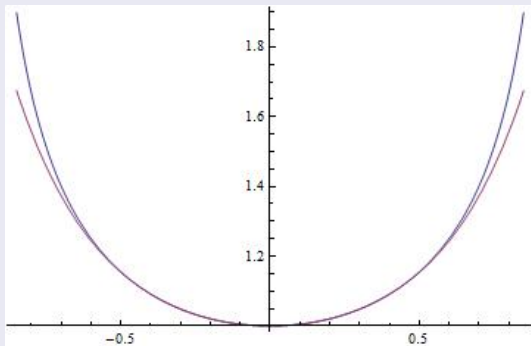
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Relativistinen kokonaisenergia

$$\begin{aligned}E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \\&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots \\&= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}},\end{aligned}$$

missä $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$ ja $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots$ (Einstein)

Newton: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$.