

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funktiota $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .

Esimerkki

$f(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Seuraus

Välillä I jatkuvalla funktiolla on olemassa antiderivaatta.

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x)) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \\ &= f(x) \cdot h + h \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} |\epsilon(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} \varepsilon dx \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \cdot |h| \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä

Merkintä "sijoitus a :sta b :hen" määritellään

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Sijoittamalla $x = a$ nähdään, että $0 = F(a) + C$, mistä $C = -F(a)$. Sijoittamalla $x = b$ saadaan

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Analogia

Määritellään differenssi Δf seuraavasti: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.
Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \Delta f(k) &= \Delta f(1) + \Delta f(2) + \dots + \Delta f(n) \\ &= (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) \\ &\quad + \dots + (f(3) - f(2)) + (f(2) - f(1)) \\ &= f(n+1) - f(1)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ x + 1, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) \, dx?$$

Esimerkki

$$h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dx, \quad h'(x)?$$

Osittaisintegrointi

$$\int_a^b fg' = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f'g$$

Esimerkki

$$\int_0^2 xe^x dx$$

Sijoitus integraaliin

Jos g' on jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$, $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$, ja $g(\alpha) = a$ sekä $g(\beta) = b$, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkki

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$x = \cos t.$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Esimerkki

$f(x) = x^2$ on parillinen ja $f(x) = x^3$ pariton.

Esimerkki

$\sin x$ on pariton ja $\cos x$ parillinen. Huomaa että

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8).$$

Lause

Olkoon f jatkuva välillä $[-a, a]$. Jos f on parillinen, on

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^a f = 0$$

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

Intuitio:

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

(Parametrimuoto)

xy-muoto $y = f(x)$

Merkitään $x = t$, $y = f(t)$, jolloin kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Pyörähdyskappale

- Tilavuus
- Vaipan pinta-ala

Jatkuvasti muuttuvan suureen ”summa”

Keskiarvo (diskreetti)

$$\mu = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n}.$$

Keskiarvo (jatkuva)

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Vertailu:

$$\mu \cdot n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10 \text{ N}$ työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10 \text{ N} \cdot 30 \text{ m} = 300 \text{ Nm}$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds.$

Esimerkki $F = C \frac{1}{s^2}$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} C \frac{1}{s^2} ds = -C \left/ \frac{1}{s} \right/_{s_1}^{s_2} = C \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right)$$