

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f =$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^s} \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$.
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$.
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$$

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $a \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $a \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b]$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Sarja

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Osasummat muodostavat *lukujonon* $S_1, S_2, S_3, \dots$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Esimerkki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$).

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Lause

- Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ($k > 1$) suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ($k > 1$) suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ suppenee, sanotaan, että } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ suppenee } \textit{itseisesti}.$$

Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{vakio}).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{vakio}).$$

Geometrisen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{vakio}).$$

Geometrisen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$

Määritelmä

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen.

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Osasumat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Osasumat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Jos $|q| > 1$, ei raja-arvoa $\lim q^n$ ole äärellisenä.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa sarjan summa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a \frac{1}{1-q}.$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793\dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793\dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkkejä

- Jokainen sarja

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

missä $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, suppenee.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_{\epsilon})(M \geq M_{\epsilon} \wedge k \geq 0 \rightarrow \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_{\epsilon})(M \geq M_{\epsilon} \wedge k \geq 0 \rightarrow \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

”Sarja suppenee mikäli (katkaistu) loppuosa saadaan mielivaltaisen pieneksi ($< \epsilon$) valitsemalla katkaisukohta M riittävän suureksi”

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t) dt$$

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t) dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \geq 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t) dt \downarrow$$

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t) dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \geq 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t) dt \downarrow$$

Seuraus

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \downarrow \Leftrightarrow s > 1$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \right)$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$

Minorantti-majoranttiperiaatteen raja-arvomuoto

Oletetaan, että $\lim \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$.

- Jos $L = 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow$.
- Jos $L = \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow$.

Osamäärätarkastin

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, (q vakio) niin sarja suppenee itseisesti.
- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Jos $L < 1$, niin sarja suppenee (itseisesti)
- Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu

Määritelmä

Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee. Jos lisäksi merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} a_n + R_M,$$

on

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \dots$$

samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ $n, m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ $n, m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Lause

Jos $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST .

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n$$

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n.$$

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$. Tällöin sarjaa kutsutaan myös Maclaurinin sarjaksi.

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lukua R kutsutaan suppenemissäteeksi. Ensimmäisessä tapauksessa sanotaan, että $R = 0$ ja viimeisessä, että $R = \infty$.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R .

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R .

Seuraus

Potenssisarjan summafunktiolla $F(x)$ on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Esimerkkejä

Binomisarja

Arkussin sarja

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

EkspONENTTIFUNKTIO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

EkspONENTTIFUNKTIO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} \\ = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \end{aligned}$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$