

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2026

Demonstraatio 3, 24.9.2026

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ja laskimia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Tiedetään, että $\alpha \in [0, \pi]$ ja että $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Mikä on $\sin \alpha$:n tarkka arvo? Entä kulman α likiarvo? Vihje: Käytä aluksi trigonometrian kaavaa/kaavoja.

Mallivastaus: Kaavan $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ mukaisesti $\frac{5}{9} + \sin^2 \alpha = 1$, josta saadaan $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, josta $\sin \alpha = \pm \frac{2}{3}$. Koska $\alpha \in [0, \pi]$, on $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Välillä $[0, \pi]$ olevalle kulmalle saadaan likiarvo $\alpha = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{3}) = 0,72972\dots$ (asteina $41,8103\dots$)

2. Sievennä lausekkeet $(2 - 5i) + (-3 + 4i)$, $(2 - 5i)(-3 + 4i)$ ja $\frac{2 - 5i}{-3 + 4i}$ muotoon, jossa näkyy erikseen reaali- ja imaginaariosa.

Mallivastaus: $(2 - 5i) + (-3 + 4i) = 2 - 3 + (-5 + 4)i = -1 - i$, $(2 - 5i)(-3 + 4i) = -6 + 8i + 15i - 20i^2 = -6 + 20 + (8 + 15)i = 14 + 23i$, ja $\frac{2 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(2 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} = \frac{-6 - 8i + 15i + 20i^2}{(-3)^2 + (-4)^2} = \frac{-26 + 7i}{25} = -\frac{26}{25} + \frac{7}{25}i$.

3. Etsi napakoordinaattiesitys luvulle $-1 + i\sqrt{3}$.

Mallivastaus: Luvun itseisarvo on $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, ja vaihekulma toteuttaa ehdon $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$. Koska luku sijaitsee kompleksitason vasemmalla puolella, voidaan vaihekulmaksi valita $\theta = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Täten $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

4. Määritä kompleksisen logaritmin $\text{Log}(-1 + i\sqrt{3})$ kaikki arvot.

Mallivastaus: Koska luvun vaihekulmaan voidaan aina lisätä täyden ympyrän monikerta, ovat kaikki napakoordinaattiesitykset muotoa

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Kaikki kompleksisen logaritmin arvot saadaan napakoordinaattiesityksistä

$$\text{Log}(-1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

5. Määritä kompleksisen potenssin $(-1 + i\sqrt{3})^i$ kaikki arvot.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^i &= e^{\text{Log}(-1 + i\sqrt{3})^i} = e^{i(\text{Log}(-1 + i\sqrt{3}))} = e^{i(\ln 2 + (\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)i)} \\ &= e^{i \ln 2 - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n} = e^{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n} e^{i \ln 2}. \end{aligned}$$

6. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritä kompleksisen potenssin $(-a^2)^{\frac{1}{2}}$ kaikki arvot.

Mallivastaus: Jos $a = 0$, ei kompleksista potenssia voi määritellä. Tarkastellaan siis tapausta $a \neq 0$.

$$(-a^2)^{\frac{1}{2}} = e^{\text{Log}(-a^2)^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{1}{2} \text{Log}(-a^2)}$$

Koska luvulla $-a^2$ on polaariesitys $-a^2 = a^2 e^{i(\pi+2\pi n)}$, saadaan logaritmin arvoiksi

$$\operatorname{Log}(-a^2) = \ln a^2 + i(\pi + 2\pi n) = 2 \ln a + i(\pi + 2\pi n),$$

josta

$$\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-a^2) = \ln a + i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$

ja edelleen

$$(-a^2)^{\frac{1}{2}} = e^{\ln a} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\pi n} = a i e^{i\pi n} = \pm a i$$

(mistä viimeisin yhtälö johtuu?).

7. Etsi kaikki yhtälön $z^2 - 2z + 5 = 0$ ratkaisut luento-esimerkin mukaisella tavalla.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}i^2}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Mieti miten edellinen tehtävä perustelee ratkaisun oikeellisuutta.

8. Selitä mikä on vialla seuraavassa päättelyssä:

$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1?$$

Mallivastaus:

Ensimmäinen yhtäsuuruus on oikein, samoin toinen vaikka merkintä $\sqrt{-1}$ ei olekaan yksikäsitteinen, se voi tarkoittaa joko kompleksilukua i tai $-i$. Myös toiseksi viimeisin yhtäsuuruus on kunnossa, joten ongelman täytyy sijaita joko kolmannessa, neljännessä tai viimeisessä yhtäsuuruudessa (tai joissain niistä). Tarkempi tarkastelu osoittaa (sivuutetaan tässä) että neljäs yhtäsuuruus on kunnossa.

Sen sijaan yksi ongelma on kolmannen yhtäsuuruuden kohdalla, sillä merkintä $\sqrt{-1}$ ei sen oikealla puolella ole yksikäsitteinen, toinen näistä voi yhtä hyvin tarkoittaa kompleksilukua i ja toinen sen vastalukua $-i$. Toinen ongelma on viimeisen yhtäsuuruuden kohdalla: Silloin kun $\sqrt{1}$ käsitetään kompleksiluvun neliöjuurena, ovat sekä 1 että -1 mahdollisia arvoja.

Päättelyvirhe johtuu siis siitä, että yhtäsuuruuksien ketjussa on yritetty käsitellä neliöjuurta myös kompleksilukujen joukossa funktiona. Neliöjuurta ei kompleksilukujen joukossa kuitenkaan voida perustellusti määritellä funktiona, vaan tällöin kyseessä on matematiikan termin *relaationa* tunnettu käsite, jossa toisin kuin funktiolla, yhdellä alkukuvalla voi olla monia kuvia.