

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Kurssin yleistiedot

Kurssin verkkosivu

Perehdy verkkosivun informaatioon:

<https://users.utu.fi/mikhirve/ins2627/Perustiedot/>

Luennot ja demot

Luennot ti 14-16 ja ke 14-16 usein etäyhteydellä. Demoajankohdat to 8-10, 10-12, 12-14, 14-16. Kaikkia ryhmiä ei toteuteta.

Suoritustavoista ja poikkeuksista kerrotaan kurssin verkkosivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 40% ja läpäistävä lopputentti.

Tenttipäivät

Löytyvät opinto-oppaasta.

Tavoitteet

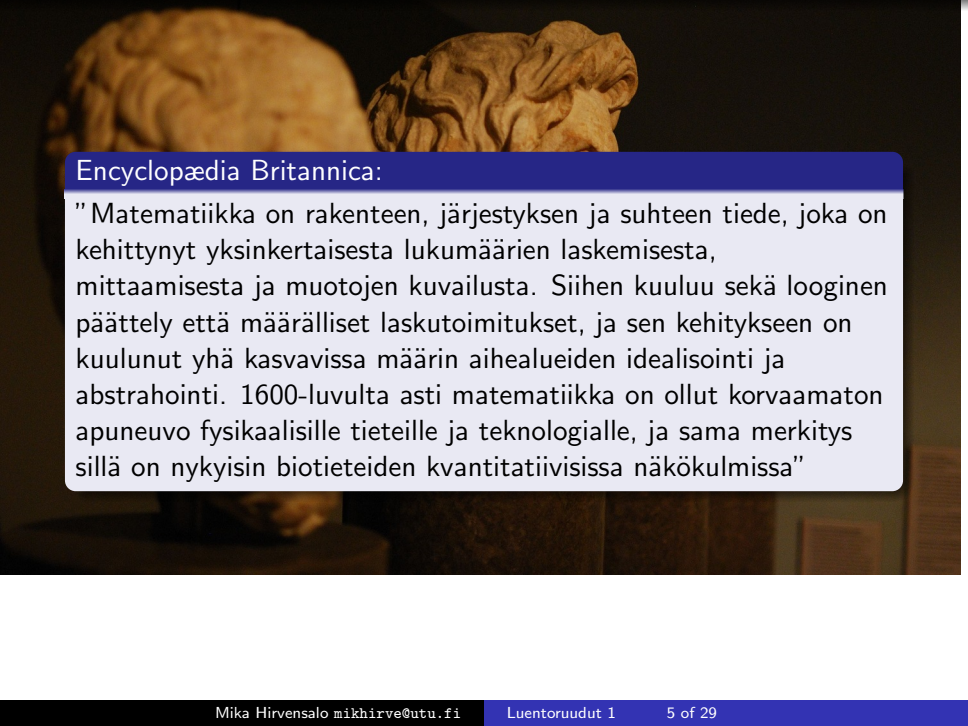
Kurssilla esitetään matematiikan peruskäsitteitä: Logiikan merkinnät, reaaliluvut, elementaariset reaalifunktiot, ja kompleksiluvut. Nämä luovat pohjaa seuraavia insinöörimatematiikan kursseja varten.

Sisältö

Matematiikan merkintöjä, tavallisimmat reaalifunktiot, kompleksiluvut.

Taustaa

- Muinaiskreikka: ΜΑΘΕΜΑ: "Tieto", "Oppi"
- Matematiikka **ei ole** luonnontiede
- Luonnontieteiden kieli: Matematiikka, tilastotiede mukaanluettuna, mahdollistaa nykymuotoiset luonnontieteet
- Matematiikka on varhaisin ihmiskunnan harjoittamista tieteistä (väittäjä tosin riippuu tieteen määritelmästä)



Encyclopædia Britannica:

"Matematiikka on rakenteen, järjestyksen ja suhteen tiede, joka on kehittynyt yksinkertaisesta lukumäärien laskemisesta, mittaamisesta ja muotojen kuvailusta. Siihen kuuluu sekä looginen päättely että määrälliset laskutoimitukset, ja sen kehitykseen on kuulunut yhä kasvavissa määrin aihealueiden idealisointi ja abstrahointi. 1600-luvulta asti matematiikka on ollut korvaamaton apuneuvo fysikaalisille tieteille ja teknologialle, ja sama merkitys sillä on nykyisin biotieteiden kvantitatiivisissa näkökulmissa"

"Matematiikan" varhaisvaiheet

Laskeminen on kirjoitustaitoa varhaisempaa $\Rightarrow$ ei kirjallisia lähteitä



Ikä n. 35000 vuotta, Löytöpaikka Lembobo, Swazimaa.



Ikä n. 20000 vuotta, löytöpaikka Ishango, Kongo.

Lukumäärä



?



Lukumäärä



Lukumäärä



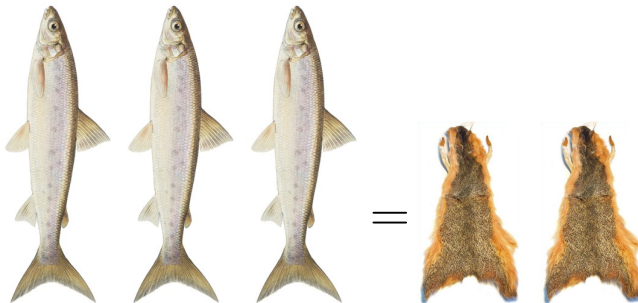
?



Lukumäärä

- Abstrakti lukumäärän käsite on kehittynyt kaikissa korkeakulttuureissa
- Metsästäjä- keräilykulttuureissa ei aina.

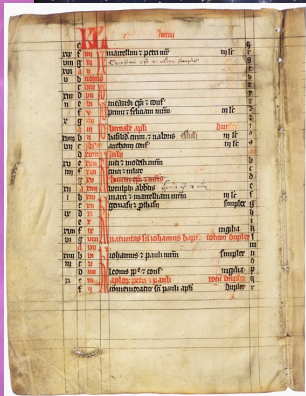
Kaupankäynti



+



?





Kheopsin pyramidi n. 2560 eKr



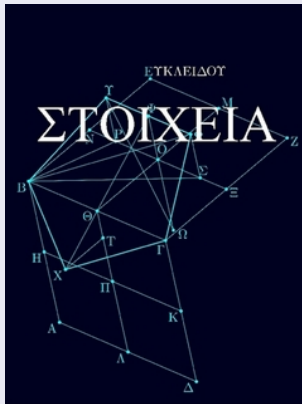
Rhindin papyrus n. 1650 eKr



Hellenistinen kausi n. 300–100 eKr



Eukleides (n. 300 eKr)

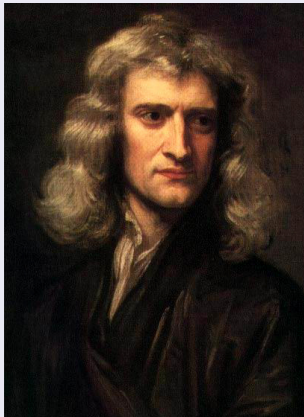


"Alkeet"



Arkhimedes (n. 278–212 eKr)

- Matemaatikko, fyysikko ja insinööri
- Kehitti kaikkia em. alueita merkittävästi
- Integraalilaskennan varhainen muoto
- Ei kehittänyt differentiaalilaskentaa (ehkä siksi ettei tuntenut negatiivisia lukuja!)



Sir Isaac Newton (1643–1727)
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Fysikaalisen maailmankuvan peruspilarit

- Kvanttimekaniikka:

Schrödingerin liikeyhtälö

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

- Yleinen suhteellisuusteoria

Einsteinin kenttäyhtälö

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- Kummankin täsmällinen kuvailu mahdollista vain pitkälle kehitetyn matematiikan avulla (differentiaali- ja integraalilaskenta, lineaarialgebra, ryhmäteoria, funktionaalianalyysi)

Tasaisesti kiihtyvä liike

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Miksi?

- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Ei operationaalista kytkentää reaailimaailmaan
- Onko

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

"totta"?

- Kaikki matemaattiset teorat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa.
- Teorian peruskäsitteet ja -oliot esitetään määritelmänä ja niiden väliset suhteet tai *aksioomina*.
- Kaikki muut teorian väittämät (lauseet, teoreemat) johdetaan aksioomista loogisesti.
- Matemaattinen teoria: Niiden lauseiden joukko, jotka voidaan johtaa aksioomista.

Vaatimuksia aksiomatiikalle

- Peruskäsitteiden ja aksioomien pitäisi olla yksinkertaisia
- Aksioomia pitäisi olla vähän
- Aksioomien pitäisi olla ristiriidattomia

Päättelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
 - Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	$\kappa, \varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\forall$ (universaalikvanttori)
- $\exists$ (eksistentiaalikvanttori)

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 3| < \delta \rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ , että ehdosta $|x - 3| < \delta$ seuraa $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)