17. DERIVOITUJEN FUNKTORIEN PITKÄ EKSAKTI JONO

Oletetaan, että $\mathcal{C}$ on hyvä kategoria. Aluksi johdetaan tarvittavia aputuloksia.

MÄÄRITELMÄ 17.1. Oletetaan, että jono

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0 \tag{17-1}$$

on eksakti. Sanotaan, että jono (17-1) lohkeaa, mikäli on olemassa sellainen kategorian $\mathcal{C}$ morfismi $\overline{\varphi} : T \to S$, että $\varphi\overline{\varphi} = 1_T$ (Tämä määritelmä on ekvivalentti sivulla 39 esitetyn määritelmän kanssa).

Väitetään, että mikäli jono (17-1) lohkeaa, on myös olemassa sellainen kuvaus $\overline{\psi}_S \to R$, että $\overline{\psi}\psi = 1_R$. Aluksi havaitaan, että

$$\varphi(s - \overline{\varphi}\varphi(s)) = \varphi(s) - \varphi\overline{\varphi}\varphi(s) = \varphi(s) - \varphi(s) = 0,$$

joten $s - \overline{\varphi}\varphi(s) \in \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\psi)$. Näin ollen on olemassa sellainen alkio $r \in R$, että

$$s - \overline{\varphi}\varphi(s) = \psi(r),$$

ja koska ψ on injektio, on r yksikäsitteinen. Määritellään nyt kuvaus $\overline{\psi}$ ehdolla $\overline{\psi}(s) = r$, kun ehto (17-2) toteutuu. Olkoon $s = \psi(r_0)$. Silloin

$$s - \overline{\varphi}\varphi(s) = \psi(r_0) - \overline{\varphi}\varphi\psi(r_0) = \psi(r_0),$$

sillä $\varphi\psi = 0$. Tällöin siis $\overline{\psi}(s) = r_0$, mistä nähdään, että $\overline{\psi}$ toteuttaa ehdon $\overline{\psi}\psi = 1_R$. On helppo todeta, että $\overline{\psi}$ on morfismi, joten se on myös kategoriassa $\mathcal{C}$.

Edellisestä tarkastelusta saadaan kullekin alkiolle $s \in S$ hajotelma

$$s = \psi(r) + \overline{\varphi}\varphi(s) \in \operatorname{Ker}(\varphi) + \operatorname{Im}\overline{\varphi}.$$

Toisaalta on selvää, että hajotelma on yksikäsitteinen, sillä jos $s \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\overline{\varphi}$, on s muotoa $s = \overline{\varphi}(t)$ ja

$$0 = \varphi(s) = \varphi\overline{\varphi}(t) = t,$$

jolloin myös $s = 0$. Näin ollen $S = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\overline{\varphi} \simeq R \oplus T$.

Oletetaan toisaalta, että on olemassa ehdon $\overline{\psi}\psi = 1_R$ toteuttava morfismi $\overline{\psi} : S \to R$. Väitetään, että silloin on myös edellä mainitun ehdon toteuttava $\overline{\varphi} : T \to S$. Käytetään inkluusiokuvauksesta merkintää $\iota : \operatorname{Ker}\overline{\psi} \to S$, ja osoitetaan, että yhdistetty kuvaus $\varphi\iota : \operatorname{Ker}\overline{\psi} \to T$ on isomorfismi. Selvästi $\varphi\iota$ on morfismi. Oletetaan sitten, että $\varphi\iota(s) = 0$, jolloin $\iota(s) \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$, ja voidaan merkitä $\iota(s) = \psi(r)$. Kuvaamalla $\overline{\psi}$:llä saadaan

$$0 = \overline{\psi}\iota(s) = \overline{\psi}\psi(r) = r,$$

josta $s = 0$, sillä inkluusio on aina injektio. Osoitetaan vielä, että $\varphi\iota$ on surjektio. Koska φ on surjektio, on jokaista $t \in T$ kohti olemassa sellainen $s \in S$, että $\varphi(s) = t$. Helposti todetaan, että myös $\varphi(s - \psi\overline{\psi}(s)) = t$, ja että $s - \psi\overline{\psi}(s) \in \operatorname{Ker}\overline{\psi}$. Kun merkitään $\overline{\varphi} = (\varphi\iota)^{-1}$, saadaan ehdon $\varphi\overline{\varphi} = 1_T$ toteuttava morfismi.

Lemma 17.2. *Oletetaan, että jono (17-1) on eksakti. Jos R on injektiivinen tai T projektiivinen, niin jono (17-1) lohkeaa.*

Todistus. Oletetaan, että R on injektiivinen. Injektiivisyyden määritelmän nojalla on on sellainen morfismi $\overline{\psi} : S \to R$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & R & \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[u, "1"] \arrow[r, "\psi"] & S \arrow[ul, "\overline{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi. Silloin $\overline{\psi}\psi = 1_R$, ja kuten edellä todettiin, on myös sellainen morfismi $\overline{\varphi}$, että $\varphi\overline{\varphi} = 1_T$.

Oletetaan, että T on projektiivinen. Projektiivisuuden määritelmän nojalla on sellainen morfismi $\overline{\varphi} : T \to S$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"] & \\ 0 & T \arrow[l] & S \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi, ja tällöin $\varphi\overline{\varphi} = 1_T$. $\square$

Tavoitteena on konstruoida jonosta (17-1) lähtien moduleille R, S ja T siinä mielessä yhteensopivat (projektiiviset) resoluutiot, että kaaviossa

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[u] \arrow[r] & S \arrow[u] \arrow[r] & T \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[u] \arrow[r] & Y_0 \arrow[u] \arrow[r] & Z_0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_1 \arrow[u] \arrow[r] & Y_1 \arrow[u] \arrow[r] & Z_1 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{17-2}$$

neliöt kommutoivat, vaakarivit ovat eksakteja, ja pystyrivit ovat (projektiivisia) resoluutioita. Injektiivisille resoluutioille saadaan vastaava kaavio, jossa pystysuorat nuolet ovat ylhäältä alaspäin. Soveltamalla tähän kaavioon funktoria F saadaan lauseen 16.4 mukaan pitkä eksakti jono, joka liittää yhteen F:stä derivoidut funktorit R:llä, S:llä ja T:llä. Lemman 17.2 mukaan voidaan olettaa, että kaikilla n:n arvoilla pätee $Y_n = X_n \oplus Z_n$.

Lemma 17.3. *Oletetaan, että seuraavassa kaaviossa modulit ovat kategoriassa $\mathcal{C}$, kuvaukset morfismeja, pystysuorat rivit ovat eksakteja, neliöt kommutoivat, ja että keskimmäinen ja joko alin tai ylin vaakarivi on eksakti. Silloin myös kolmas vaakarivi on eksakti.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_A"'] & B_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi_B"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & B_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että kolmas vaakarivi on eksakti, ja osoitetaan, että myös ensimmäinen on eksakti. Kaikille $a_1 \in A_1$ saadaan

$$\psi_C\varphi_1\psi_1(a_1) = \varphi_2\psi_B\psi_1(a_1) = \varphi_2\psi_2\psi_A = 0,$$

joten $\varphi_1\psi_1 = 0$, sillä ψ_C on injektio. Näin ollen $\operatorname{Im}\psi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_1$. Osoitetaan seuraavaksi, että ψ_1 on injektio. Jos $\psi_1(a_1) = 0$, myös

$$0 = \psi_B\psi_1(a_1) = \psi_2\psi_A(a_1),$$

ja koska ψ_2 ja ψ_A ovat oletuksen mukaan injektioita, on $a_1 = 0$.

Näytetään seuraavaksi, että φ_1 on surjektio. Valitaan jokin $c_1 \in C_1$, jolloin on olemassa sellainen $b_2 \in B_2$, että $\psi_C(c_1) = \varphi_2(b_2)$. Silloin

$$0 = \varphi_C\psi_C(c_1) = \varphi_C\varphi_2(b_2) = \varphi_3\varphi_B(b_2),$$

siis $\varphi_B(b_2) \in \operatorname{Ker}\varphi_3 = \operatorname{Im}\psi_3$, joten on olemassa sellainen $a_3 \in A_3$, että $\varphi_B(b_2) = \psi_3(a_3)$, ja edelleen sellainen $a_2 \in A_2$, että $a_3 = \varphi_A(a_2)$. Silloin

$$\varphi_B(b_2) = \psi_3(a_3) = \psi_3\varphi_A(a_2) = \varphi_B\psi_2(a_2),$$

joten $b_2 - \psi_2(a_2) \in \operatorname{Ker}\varphi_B = \operatorname{Im}\psi_B$. Löydetään siis sellainen $b_1 \in B_1$, että $b_2 - \psi_2(a_2) = \psi_B(b_1)$, ja saadaan

$$\psi_C\varphi_1(b_1) = \varphi_2\psi_B(b_1) = \varphi_2(b_2 - \psi_2(a_2)) = \varphi_2(b_2) = \varphi_C(c_1).$$

Koska ψ_C on injektio, on oltava $\varphi_1 b_1 = c_1$, jolloin b_1 on c_1:n alkukuva.

Näytetään lopuksi, että $\operatorname{Ker}\varphi_1 \subseteq \operatorname{Im}\psi_1$. Valitaan jokin $b_1 \in \operatorname{Ker}\varphi_1$, jolloin

$$0 = \psi_C\varphi_1(b_1) = \varphi_2\psi_B(b_1),$$

siis $\psi_B(b_1) \in \operatorname{Ker}\varphi_2 = \operatorname{Im}\psi_2$. On siis sellainen $a_2 \in A_2$, että $\psi_B(b_1) = \psi_2(a_2)$. Tällöin

$$\psi_3\varphi_A(a_2) = \varphi_B\psi_2(a_2) = \varphi_B\psi_B(b_1) = 0,$$

joten ψ_3:n injektiivisyyden perusteella $\varphi_A(a_2) = 0$, siis $a_2 \in \operatorname{Ker}\varphi_A = \operatorname{Im}\psi_A$. Löytyy siis sellainen $a_1 \in A_1$, että $a_2 = \psi_A(a_1)$, josta saadaan

$$\psi_B\psi_1(a_1) = \psi_2\psi_A(a_1) = \psi_2(a_2) = \psi_B(b_1).$$

Morfismin ψ_B injektiivisyyden nojalla $\psi_1(a_1) = b_1$, josta $a_1 \in \operatorname{Im}\psi_1$.

Oletetaan nyt, että ensimmäinen vaakarivi on eksakti, ja todistetaan, että myös kolmas vaakarivi on eksakti. Valitaan jokin $a_3 \in A_3$. φ_A on surjektio, joten $a_3 = \varphi_A(a_2)$ jollekin $a_2 \in A_2$. Saadaan

$$\varphi_3\psi_3(a_3) = \varphi_3\psi_3\varphi_A(a_2) = \varphi_3\varphi_B\psi_2(a_2) = \varphi_C\varphi_2\psi_2(a_2) = 0,$$

mistä nähdään että $\operatorname{Im}\psi_3 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_3$. Osoitetaan, että φ_3 on surjektio, ja oletetaan tätä varten, että $c_3 \in C_3$. φ_C:n surjektiivisuuden nojalla $c_3 = \varphi_C(c_2)$ jollekin $c_2 \in C_2$, ja laskemalla saadaan

$$c_3 = \varphi_C(c_2) = \varphi_C\varphi_2(b_2) = \varphi_3\varphi_B(b_2),$$

sillä myös φ_2 on surjektio. Näytetään, että ψ_3 on injektio, ja oletetaan siksi, $\psi_3(a_3) = 0$ jollekin $a_3 \in A_3$. Morfismin φ_A surjektiivisuuden nojalla $a_3 = \varphi_A(a_2)$, missä $a_2 \in A_2$, ja

$$0 = \psi_3(a_3) = \psi_3\varphi_A(a_2) = \varphi_B\psi_2(a_2),$$

joten $\psi_2(a_2) \in \operatorname{Ker}\varphi_B = \operatorname{Im}\psi_B$. Näin ollen $\psi_2(a_2) = \psi_B(b_1)$. Saadaan

$$0 = \varphi_2\psi_2(a_2) = \varphi_2\psi_B(b_1) = \psi_C\varphi_1(b_1),$$

ja $\varphi_1(b_1) = 0$ kuvauksen ψ_C injektiivisyyden nojalla. Toisaalta $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Im}\psi_1$, joten $b_1 = \psi_1(a_1)$ jollekin $a_1 \in A_1$. Tästä saadaan laskemalla

$$\psi_2(a_2) = \psi_B(b_1) = \psi_B\psi_1(a_1) = \psi_2\psi_A(a_1),$$

ja siis $a_2 = \psi_A(a_1)$, sillä ψ_2 on injektio. Näin ollen

$$a_3 = \varphi_A(a_2) = \varphi_A\psi_A(a_1) = 0.$$

Lopuksi on osoitettava, että $\operatorname{Ker}\varphi_3 \subseteq \operatorname{Im}\psi_3$. Valitaan siis mielivaltainen $b_3 \in \operatorname{Ker}\varphi_3$. Tämä voidaan φ_B:n surjektiivisuuden nojalla kirjoittaa muodossa $b_3 = \varphi_B(b_2)$, ja siis

$$0 = \varphi_3(b_3) = \varphi_3\varphi_B(b_2) = \varphi_C\varphi_2(b_2),$$

joten $\varphi_2(b_2) \in \operatorname{Ker}\varphi_C = \operatorname{Im}\psi_C$, siis

$$\varphi_2(b_2) = \psi_C(c_1) = \psi_C\varphi_1(b_1) = \varphi_2\psi_B(b_1).$$

Nyt siis $b_2 - \psi_B(b_1) \in \operatorname{Ker}\varphi_2 = \operatorname{Im}\psi_2$, joten $b_2 - \psi_B(b_1) = \psi_2(a_2)$. Tällöin siis

$$b_3 = \varphi_B(b_2) = \varphi_B\psi_B(b_1) + \varphi_B\psi_2(a_2) = \varphi_B\psi_2(a_2) = \psi_3\varphi_A(a_2) \in \operatorname{Im}\psi_3.$$

□

Seuraavassa lemmassa kaikki modulit ovat kategoriassa $\mathcal{C}$.

Lemma 17.4. *Oletetaan, että P_A ja P_C ovat projektiivisia ja että kaaviossa*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
0 & & A \arrow[ll] \arrow[d, "\psi"'] & P_A \arrow[l, "\varepsilon_A"'] & M_A \arrow[l, "\psi_A"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & B \arrow[d, "\varphi"'] & & & \\
0 & & C \arrow[ll] \arrow[d] & P_C \arrow[l, "\varepsilon_C"'] & M_C \arrow[l, "\psi_C"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

ovat sekä pysty- että vaakarivit eksakteja. Silloin on olemassa sellainen moduli M_B ja morfismit ($\in \mathcal{C}$), että allaolevassa kaaviossa ovat sekä pysty- että vaakarivit eksakteja, ja että neliöt kommutoivat (ι_A on inkluusio ja π_C projektio). Lisäksi $P_A \oplus P_C$ on projektiivinen.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "\psi"'] & P_A \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "\iota_A"'] & M_A \arrow[l, "\psi_A"'] \arrow[d, "\psi_1"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & B \arrow[l] \arrow[d, "\varphi"'] & P_A \oplus P_C \arrow[l, "\varepsilon_B"'] \arrow[d, "\pi_C"'] & M_B \arrow[l, "\psi_B"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & C \arrow[l] \arrow[d] & P_C \arrow[l, "\varepsilon_C"'] \arrow[d] & M_C \arrow[l, "\psi_C"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Todistus. Kategoriaa $\mathcal{C}$ koskevan oletuksen nojalla $P_A \oplus P_C$ on $\mathcal{C}$:ssä, ja kahden projektiivisen modulin suora summa on selvästi projektiivinen.

Koska P_C on projektiivinen, on olemassa ehdon $\varphi h = \varepsilon_C$ toteuttava morfismi $h : P_C \to B$. Määritellään kuvaus ε_B ehdolla

$$\varepsilon_B(x_A, x_C) = \psi\varepsilon_A(x_A) + h(x_C).$$

Silloin

$$\psi\varepsilon_A(x_A) = \varepsilon_B(x_A, 0) = \varepsilon_B\iota_A(x_A),$$

mistä nähdään, että vasemmassa ylänurkassa oleva neliö kommutoi. Samoin

$$\varphi\varepsilon_B(x_A, x_C) = \varphi\psi\varepsilon_A(x_A) + \varphi h(x_C) = \varepsilon_C(x_C),$$

joten myös vasen alaneliö kommutoi.

Osoitetaan seuraavaksi, että ε_B on surjektiivinen, ja valitaan tätä varten $b \in B$. Kuvaukset ε_C ja π_C ovat surjektioita, joten myös niiden kompositio $\varepsilon_C \pi_C = \varphi \varepsilon_B$ on surjektio. Näin ollen on olemassa ehdon $\varphi(b) = \varphi \varepsilon_B(x_A, x_C)$ toteuttava alkio $(x_A, x_C) \in P_A \oplus P_C$. Silloin $b - \varepsilon(x_A, x_C) \in \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \psi$, joten

$$b - \varepsilon_B(x_A, x_C) = \psi(a) = \psi \varepsilon_A(x'_A) = \varepsilon_B \iota_A(x'_A) = \varepsilon_B(x'_A, 0).$$

Tällöin $b = \varepsilon_B(x_A + x'_A, x_C)$.

Olkoon $M_B = \operatorname{Ker} \epsilon_B$ ja $\psi_B : M_B \to P_A \oplus P_C$ inkluusio. Määritellään kuvaus $\psi_1 : M_A \to M_B$ ehdolla $\psi_1(m_A) = (\psi_A(m_A), 0)$. ψ_1 on hyvin määritelty, sillä

$$\varepsilon_B(\psi_A(m_A), 0) = \psi \varepsilon_A \psi_A(m_A) + h(0) = 0,$$

ja oikea yläneliö kommutoi kuvauksen ψ_1 määritelmän nojalla.

Määritellään seuraavaksi φ_1. Oletetaan, että $(x_A, x_C) \in M_B$, jolloin

$$0 = \varphi \varepsilon_B(x_A, x_C) = \varepsilon_C \pi_C(x_A, x_C) = \varepsilon_C(x_C),$$

siis $x_C \in \operatorname{Ker} \varepsilon_C = \operatorname{Im} \psi_C$. Tällöin on sellainen yksikäsitteinen $m_C \in M_C$, että $x_C = \psi_C(m_C)$. Määritellään nyt

$$\varphi_1(x_A, x_C) = m_C.$$

Silloin

$$\psi_C \varphi_1(x_A, x_C) = \psi_C(m_C) = x_C = \pi_C(x_A, x_C) = \pi_C \psi_B(x_A, x_C),$$

joten myös oikea alaneliö kommutoi. Väitteen todistamatta oleva osa seuraa nyt lemmasta 17.3. $\square$

Seuraus 17.5. *Olkoon jono (17-1) eksakti, X ja Z modulien R ja T projektiivisia resoluutioita. Silloin on olemassa modulin S projektiivinen resoluutio Y kuten kaaviossa (17-2). Lisäksi voidaan valita $Y_n = X_n \oplus Z_n$, ja vaakasuorat kuvaukset inkluusioiksi ja projektioiksi.*

Todistus. Lemman 17.4 mukaan saadaan kaavion

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & R \arrow[l] \arrow[d, "\psi"'] & X_0 \arrow[l, "\varepsilon_R"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \varepsilon_R \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\psi_1"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & S \arrow[l] \arrow[d, "\varphi"'] & X_0 \oplus Y_0 \arrow[l, "\varepsilon_S"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \varepsilon_S \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & T \arrow[l] \arrow[d] & Z_0 \arrow[l, "\varepsilon_T"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \varepsilon_T \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{17-3}$$

mukainen tilanne, jossa neliöt kommutoivat ja kaikki rivit ovat eksakteja. Lemman 17.3 oletukset ovat voimassa alla olevassa kaaviossa,

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 & \operatorname{Ker}\varepsilon_R \arrow[l] \arrow[d] & X_1 \arrow[l, "\partial_X"'] & \operatorname{Ker}\partial_X \arrow[l, "\iota"'] & 0 \arrow[l] \\
 & \operatorname{Ker}\varepsilon_S \arrow[d] & & & \\
0 & \operatorname{Ker}\varepsilon_T \arrow[l] \arrow[d] & Z_1 \arrow[l, "\partial_Z"'] & \operatorname{Ker}\partial_Z \arrow[l, "\iota"'] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

joten voidaan muodostaa kaavio

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & \operatorname{Ker}\varepsilon_R \arrow[l] \arrow[d, "\psi_1"'] & X_1 \arrow[l, "\partial_X"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_X \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\psi_2"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & \operatorname{Ker}\varepsilon_S \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_1"'] & X_1 \oplus Z_1 \arrow[l, "\partial_Y"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_Y \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\varphi_2"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & \operatorname{Ker}\varepsilon_T \arrow[l] \arrow[d] & Z_1 \arrow[l, "\partial_Z"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_Z \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{17-4}
$$

jossa neliöt kommutoivat ja kaikki rivit ovat eksakteja. Yhdistämällä (17-3) ja (17-4) saadaan

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & R \arrow[l] \arrow[d, "\psi"'] & X_0 \arrow[l, "\varepsilon_R"'] \arrow[d] & X_1 \arrow[l, "\partial_X"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_X \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\psi_2"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & S \arrow[l] \arrow[d, "\varphi"'] & X_0 \oplus Y_0 \arrow[l, "\varepsilon_S"'] \arrow[d] & X_1 \oplus Z_1 \arrow[l, "\partial_Y"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_Y \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d, "\varphi_2"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & T \arrow[l] \arrow[d] & Z_0 \arrow[l, "\varepsilon_T"'] \arrow[d] & Z_1 \arrow[l, "\partial_Z"'] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\partial_Z \arrow[l, "\iota"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{17-5}
$$

Toistamalla argumenttia saadaan induktiivisesti rakennettua haluttu kaavio. $\square$

Seuraavaksi käsitellään analogista tilanteita, joissa modulit ovat injektiivisiä.

Lemma 17.6. *Oletetaan, että I_A ja I_C ovat injektiivisiä moduleja ja että kaaviossa*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\psi"'] & I_A \arrow[r, "\psi_A"] & Q_A \arrow[r] & 0 \\
 & B \arrow[d, "\varphi"'] & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\varepsilon_C"] \arrow[d] & I_C \arrow[r, "\psi_C"] & Q_C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

ovat sekä pysty- että vaakarivit eksakteja. Silloin on olemassa sellainen moduli Q_B ja sellaiset morfismit, että kaaviossa

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\psi"'] & I_A \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "\iota_A"'] & Q_A \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "\varphi"'] & I_A \oplus I_C \arrow[r, "\psi_B"] \arrow[d, "\pi_C"'] & Q_B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\varepsilon_C"] \arrow[d] & I_C \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d] & Q_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ovat kaikki rivit eksakteja ja neliöt kommutoivat. Lisäksi $I_A \oplus I_C$ on injektiivinen.

Todistus. Moduli $I_A \oplus I_B$ on kategoriassa $\mathcal{C}$, sillä $\mathcal{C}$ oletettiin hyväksi kategoriaksi. Lisäksi $I_A \oplus I_B$ on injektiivisten modulien suorana summana injektiivinen. Koska I_A on injektiivinen, on olemassa morfismi $h : B \to I_A$, jolle pätee $\varepsilon_A = h\psi$. Lemman todistus on samankaltainen kuin lemman 17.4 todistus, joten esitellään vain muutama yksityiskohta: määritellään

$$\varepsilon_B(b) = (h(b), \varepsilon_C \varphi(b)),$$

$Q_B = (I_A \oplus I_C)/B$, ja $\varphi_B : I_A \oplus I_C \to Q_B$ projektiokuvaus. Kun on todettu, että neliöt kommutoivat, seuraa lemmasta 17.3, että myös keskimmäinen rivi on eksakti. $\square$

Seuraus 17.7. *Tarkastellaan jonoa (17-1). Olkoot X ja Z modulien R ja T injektiivisiä resoluutioita. Silloin on olemassa sellainen modulin S injektiivinen resoluutio Y, että kaaviossa (17-2) (pystysuorat nuolet ylhäältä alas) vaakarivit ovat eksakteja ja neliöt kommutoivat. Lisäksi voidaan valita $Y_n = X_n \oplus Z_n$, ja vaakasuorat kuvaukset inkluusioiksi ja projektioiksi.*

Todistus. Todistus on samankaltainen kuin seurauksen 17.5 todistus. $\square$

Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}'$ hyviä kategorioita, sekä $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ joko oikealta tai vasemmalta eksakti funktori, jolloin F on additiivinen (HS, s.135). Lisäksi oletetaan, että kategoriassa $\mathcal{C}$ on kylliksi sekä projektiivisia että injektiivisiä moduleja. Tarkastellaan jälleen eksaktia jonoa (17-1). Muodostetaan taulukon 1 s.55 mukaisesti joko projektiivinen tai injektiivinen resoluutio R:lle ja T:lle. Käyttäen seurausta 17.5 tai 17.7 lisätään kaavioon keskimmäinen pystyrivi, ja sovelletaan funktoria F näin saatuun kaksiulotteiseen kaavioon. Tämän jälkeen "unohdetaan" modulit $F(R)$, $F(S)$ ja $F(T)$ sisältävä vaakarivi.

Jäljelle jäävässä kaaviossa pystyrivit ovat komplekseja ja neliöt kommutoivat. Vaakarivit ovat eksakteja, sillä kukin eksakti jono

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\psi_n} Y_n \xrightarrow{\varphi_n} Z_n \longrightarrow 0$$

lohkeaa; olkoon esimerkiksi F vasemmalta eksakti kovariantti funktori. Tällöin on olemassa sellainen morfismi $\overline{\varphi_n} : Z_n \to Y_n$, että $\varphi_n \overline{\varphi_n} = 1_{Z_n}$. Funktoria F soveltamalla saatava jono

$$0 \longrightarrow F(X_n) \xrightarrow{F(\psi_n)} F(Y_n) \xrightarrow{F(\varphi_n)} F(Z_n)$$

on eksakti, sillä F oletettiin vasemmalta eksaktiksi. Toisaalta $F(\varphi_n)F(\overline{\varphi_n}) = F(1_{Z_n}) = 1$, joten kuvaus $F(\varphi_n)$ on surjektio (Väite seuraa myös lauseesta 10.2). Eksakteihin vaakariveihin voidaan nyt soveltaa lausetta 16.4, josta saadaan

Lause 17.8. *Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}'$ hyviä kategorioita ja*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{\varphi} T \longrightarrow 0$$

eksakti jono $\mathcal{C}$:ssä, ja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ joko vasemmalta tai oikealta eksakti funktori. Oletetaan lisäksi, että kategoriassa $\mathcal{C}$ on kylliksi sekä projektiivisia että injektiivisiä moduleja. Silloin F:n derivoidut funktorit R:llä, S:llä ja T:llä muodostavat pitkän eksaktin jonon seuraavasti:

a) Jos F on kovariantti ja oikealta eksakti, on jono muotoa

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow F(T) \leftarrow F(S) \leftarrow F(R) \leftarrow F_1(T) \leftarrow F_1(S) \leftarrow F_1(R) \\ \leftarrow F_2(T) \leftarrow F_2(S) \leftarrow F_2(R) \leftarrow F_3(T) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

b) Jos F on kontravariantti ja oikealta eksakti, on jono muotoa

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow F(R) \leftarrow F(S) \leftarrow F(T) \leftarrow F_1(R) \leftarrow F_1(S) \leftarrow F_1(T) \\ \leftarrow F_2(R) \leftarrow F_2(S) \leftarrow F_2(T) \leftarrow F_3(R) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

c) Jos F on kovariantti ja vasemmalta eksakti, on jono muotoa

$$\begin{aligned}0 \to F(R) \to F(S) \to F(T) \to F^1(R) \to F^1(S) \to F^1(T)\\ \to F^2(R) \to F^2(S) \to F^2(T) \to F^3(R) \to \dots\end{aligned}$$

d) Jos F on kontravariantti ja vasemmalta eksakti, on jono muotoa

$$\begin{aligned}0 \to F(T) \to F(S) \to F(R) \to F^1(T) \to F^1(S) \to F^1(R)\\ \to F^2(T) \to F^2(S) \to F^2(R) \to F^3(T) \to \dots\end{aligned}$$

Mainitaan lopuksi lauseeseen 17.8 liittyvä tulos.

Lause 17.9. *Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}'$ hyviä kategorioita, ja*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{R} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "f_R"'] & \tilde{S} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "f_S"'] & \tilde{T} \arrow[r] \arrow[d, "f_T"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\psi"] & S \arrow[r, "\varphi"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio $\mathcal{C}$:ssä. Oletetaan, että $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ on joko vasemmalta tai oikealta eksakti funktori, ja että $\mathcal{C}$:ssä on kylliksi sekä projektiivisia että injektiivisiä moduleja. Silloin modulien $\tilde{R}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ ja R, S, T indusoimat F:n derivoitujen funktorien pitkät eksaktit jonot muodostavat kommutoivan kaavion, jossa kuvauksina ovat derivoitujen funktoreiden morfismeihin f_R, f_S ja f_T liittämät morfismit.