Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktioteoria, demonstraatio VIII, 23.3. 2012

1. Olkoon $f(z) = \frac{z^2-1}{z^3(z^2+1)}$. Laske $\oint_C f(z)dz$ missä (a) C sulkee sisäänsä kaikki $f(z)$:n singulariteetit, (b) C sulkee sisäänsä pisteet i ja $-i$ mutta ei pistettä 0, (c) C sulkee sisäänsä pisteet 0 ja $-i$ mutta ei pistettä i, (d) C ei sulje sisäänsä $f(z)$:n singulariteetteja.

2. Laske $\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz$, missä C on käyrä $|z| = 2$.

3. Laske $\int_C \frac{1}{(z^2-1)^2+3}dz$, kun C on sen positiivisesti suunnistetun suorakulmion reuna, jota rajoittavat suorat $x = 2, x = -2, y = 0$, ja $y = 1$.

4. Laske $\oint_C f(z)\,dz$, $\quad f(z) = \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}$ kun (a) C on ympyrä $|z-2| = 5$, (b) C on ympyrä $|z+1| = 2$, (c) C on ympyrä $|z-2| = R$ ja R kasvaa rajatta.

5. Laske $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$. Vihje: Valitse integroimistie siten, että se muodostuu ympyrän $|z| = R$ ylemmästä puoliskosta ja reaaliakselilla olevasta halkaisijasta ja anna $R \to \infty$.

6. Möbius kuvaukset määritellään kaavalla $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ missä $\Delta = ad - bc \neq 0$. Tapauksessa $c \neq 0$ asetetaan $T(-d/c) = \infty, T(\infty) = a/c$. Osoita, että lauseke $\frac{1+|z|^2}{1+|T(z)|^2}|T'(z)|$ on rajoitettu tasossa, kun T on Möbius-kuvaus. Toisin sanoen, osoita, että annetuille vakioille a, b, c, d on olemassa m siten, että

$$\sup\{\frac{1+|z|^2}{1+|T(z)|^2}|T'(z)| : z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}\} < m < \infty\,.$$

7.(a) Osoita, että kuvaus $z \mapsto (z+1)/(z-1) \equiv g(z)$ on involuutio, ts. $g(g(z)) = z$ jokaisella z, ja että se kuvaa yksikkökiekon vasemmalle puolitasolle. Etsi ympyrän $C_s = \{z \in \mathbb{C} : |z-s|^2 = s^2 - 1\}$ kuvajoukko kuvauksessa g kun $s > 1$.

(b) Osoita, että $f(z) = exp(g(z))$ kuvaa yksikkökiekon $\mathbb{D}$ yksikkökiekon osajoukoksi. Mikä on $f(\mathbb{D})$?

FILE: ~/ComplexAnalysis/CA12/d08/ ft201208.tex — 14. maaliskuuta 2012 (klo 19.02).