

Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
 Funktioteoria, demonstraatio IX, 30.3. 2012

1. (a) Osoita, että yhtälön $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ juuret ovat rengasalueessa $1 < |z| < 2$.
 (b) Etsi $R > 0$ siten, että yhtälön $z^9 - 8z^2 + 5 = 0$ juuret ovat kiekossa $|z| < R$.
2. (a) Laske (esim. argumentin periaatteen avulla) $\int_{|z-\pi/2|=1} \tan z dz$.
 (b) Laske (esim. argumentin periaatteen avulla) $\int_{|z|=3} \tanh z dz$.
3. Olkoon $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$. Laske $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ kun C on ympyrä $|z| = 4$.
4. Montako juurta yhtälöllä $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ on kiekossa $|z| < 1$?
5. Olkoon f analyyttinen yksikkökieken sulkeumassa \overline{D} . Oletamme, että $|f(z)| = 1$ jos $|z| = 1$ ja että f ei ole vakio. Osoita, että D on $f(\overline{D})$:n osajoukko.
6. Laske $\oint_C f(z) dz$, $f(z) = e^{az}/\cosh z$, kun C on sen suorakulmion reuna, jonka kärjet ovat $-R, R, R + \pi i, -R + \pi i$.