[1]

Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria, demonstraatio X, 13.4. 2012

1. Osoita, että $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$.

2. Näytä, että
(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi/3$.
(b) Näytä, että kun $n = 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} .$$

(Ohje: Kokeile tietä 0:sta R:ään sitten R:stä pisteesen $Re^{2\pi i/n}$, ja tästä takaisin 0:aan tai sovella yleistä lausetta.)

3. Osoita, että $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin(\frac{2\pi}{5})$.

4. Möbius kuvaukset määritellään kaavalla $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ missä $\Delta = ad - bc \neq 0$. Tapauksessa $c \neq 0$ asetetaan $T(-d/c) = \infty, T(\infty) = a/c$.
(a) Osoita, että ne muodostavat ryhmän.
(b) Osoita, että $T(z_1) - T(z_2) = \frac{\Delta(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$.
(c) Osoita, että kaksoissuhde $[z_1, z_2, z_3, z_4] \equiv \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ on invariantti Möbius kuvauksessa T, ts. $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]\, , w_j = T(z_j)$.

5. Kiinnitetään kulma $\theta \in (0, \pi/4)$. Suorakulmaisen kolmion $(-1, 1, e^{i2\theta})$ kateetit halkaisijoina piirretään puoliympyrät, jotka eivät leikkaa kolmion muita sivuja. Etsi sellainen Möbius-kuvaus $w(z)$, joka kuvaa pistekolmikon $(-1, 1, e^{i2\theta})$ kolmikolle $(-1, 1, \infty)$. Miten kuvautuvat ko. suorakulmaisen kolmion sivut ja ko. puoliympyränkaaret?

6. Olkoon $z, 0 < |z| < 1$, kiinteä. Osoita, että kaikki ympyrät, jotka käyvät pisteiden z and $1/\bar{z}$ kautta, leikkaavat yksikköympyrän kohtisuorasti.

7. Olkoon $s \in (0, 1)$ ja $A(s) = \cup_{|z|<s}[z, 1]$. Etsi luku $c(s) > 0$ siten, että arvoilla $|z| < 1, z \in A(s)$ pätee $1 - |z| > c(s)|1 - z|$.

[1] FILE: ~/ComplexAnalysis/CA12/d10/ ft201210.tex -- 28. maaliskuuta 2012 (klo 8.01).