[1]

Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria, demonstraatio XI, 2012-04-20

HUOM. Tentti on 2.5. 2012

1. Möbius kuvaukset määritellään kaavalla $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ missä $\Delta = ad - bc \neq 0$. Tapauksessa $c \neq 0$ asetetaan $T(-d/c) = \infty, T(\infty) = a/c$. Osoita, että tapauksessa $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$, ne kuvaavat ylemmän puolitason bijektiivisesti itselleen.

2. Kuten kurssilla on todettu Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi. Tämän nojalla tai algebrallisesti etsi ympyrän $\{z \in \mathbb{C} | |z-1| = 1\}$ kuvajoukko kuvauksessa $w(z) = 1/(z+1)$.

3. Kuvaa Möbius-kuvauksella ympyröiden $|z| = 1$ ja $|z - 1/4| = 1/4$ reunustama rengasalue alueelle, jonka reuna muodostuu ympyröistä $|z| = 1$ ja $|z| = r$ missä vakio $r \in (0,1)$ on etsittävä. Ohje: Kaksoissuhteet $[-1, 0, 1/2, 1]$ ja $[-1, -r, r, 1]$ ovat samat.

4. Etsi annettujen alueiden G kuvajoukot annetussa kuvauksessa
(a) $G = \{z : |z| < 1\}, w(z) = \frac{z+i}{z-i}$,
(b) $G = \{z : |z-1| > 1\}, w(z) = \frac{z}{z-2}$,
(c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}, w(z) = \frac{z+1}{z-1}$,
(d) $G = \{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4, |z| < 1\}, w(z) = \frac{2z+1}{z+i}$,
(e) $G = \{z : 1 < |z| < 2\}, w(z) = \frac{z}{z+1}$,

5. Etsi Möbius-kuvaus, joka vie annetun kolmikon z kolmikolle w:
(a) $z = (1, 0, i), w = (-1, \infty, 1)$,
(b) $z = (i, 1-i, 1), w = (0, -1, \infty)$,
(c) $z = (1+i, 1-i, -1), w = (0, 1, i)$.

6. Etsi Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetun alueen D aluelle G
(a) $D = \{z : |z| < 2\}, G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$,
(b) $D = \{z : |z-1| < 1\}, G = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$,
(c) $D = \{z : |z+1| < 2\}, G = \{w : \operatorname{Re} w < 0\}$,
(d) $D = \{z : |z-i| < 1\}, G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

[1] FILE: ~/ComplexAnalysis/CA12/d11/ ft201211.tex — 10. huhtikuuta 2012 (klo 16.30).