[1]

Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria, demonstraatio XII, 2012-04-27

HUOM. Tentti on 2.5. 2012!

1. Etsi Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetun alueen D aluelle G annetuin normalisoinnein:

(a) $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, G = \{z : |z| < 1\}\,, w(0) = 1, w(1) = i, w(-1) = -i\,,$

(b) $D = \{z : |z| \leq 1\}\,, G = \{w : |w-1| \leq 1\}\,, w(1) = 0, w(i) = 2, w(-i) = 1+i\,.$

2. Möbius kuvaukset määritellään kaavalla $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ missä $\Delta = ad - bc \neq 0$. Tapauksessa $c \neq 0$ asetetaan $T(-d/c) = \infty, T(\infty) = a/c\,.$

(a) Etsi ne pisteet, joissa kuvauksen suurennussuhde $|T'(z)|$ on $< 1, = 1, > 1, = g\,,$ missä $g > 0$ on vakio.

(b) Etsi ne pisteet, joissa $\operatorname{Arg} T'(z)\,,$ on vakio.

3. (a) Osoita, että kuvaus $w(z) = z + 1/z$ kuvaa alueen $|z| > 1$ joukolle $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]\,.$ Kuvausta kutsutaan H. J. Joukowskin (1847-1921) kuvaukseksi.

(b) Etsi yksikköympyrän $r = 1$ kuvajoukko napakoordinaattien (r, θ) avulla.

(c) Jos $w = z + 1/z = u + iv\,,$ niin $u = (r + 1/r)\cos\theta \quad \text{and}\, v = (r - 1/r)\sin\theta\,.$ Osoita, että ympyrä $r = c, c > 1\,,$ kuvautuu ellipsiksi, jonka isompi puoliakseli on $c+1/c$ ja pienempi puoliakseli on $c - 1/c\,.$ Osoita, että säteet $\theta = c$ kuvautuvat hyperbelin kaareksi.

4. (a) Mille alueelle funktio $w(z) = z/(z^2 + 1)$ kuvaa yksikkökiekon? Onko kuvaus konforminen?

(b) Mille alueelle $w(z) = 1/(z^2+1)$ kuvaa yksikkökiekon ylemmän puoliskon? Onko kuvaus konforminen?

Vihje. Muotoa $w = \frac{az^2+bz+c}{a'z^2+b'z+c'}$ oleva kuvaus voidaan esittää suorittamalla peräkkäin kuvaukset $z_1 = \frac{Az+B}{Cz+D}, z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + 1/z_1), w = A'z_2 + B'$ tai sitten kuvaukset z_1 ja $w = z_1^2 + A'\,.$

5. Olkoon C reaaliakselin pisteiden ± 1 kautta käyvä ympyrä, jonka keskipiste on positiivisella imaginaariakselilla ja joka muodostaa kulman $\alpha \in (0, \pi)$ positiivisen reaaliakselin kanssa. Etsi C:n kuvajoukko kuvauksessa $w(z) = (1/2)(z + 1/z)$. Etsi myös sellaisen ympyrän C_1 kuvajoukko, jonka keskipiste on ylemmässä puolitasossa ja sulkee C:n sisäänsä ja joka sivuaa C:tä pisteessä 1.

6. Olkoon G alue kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja $f : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analyyttinen funktio. Osoita, että funktio $\ln|f(z)|$ on harmoninen aluessa G. Vihje: Cauchyn-Riemannin yhtälöt.

7. Olkoot z_1, z_2, z_3, z_4 pisteitä yksikköympyrällä tässä järjestyksessä. Osoita, että

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_2 - z_3||z_1 - z_4|\,.$$

Ylläoleva tulos on nimeltään Ptolemaioksen (85-165) lause. Totea, että sen erikoistapauksena $z_3 = -z_1, z_4 = -z_2$, saadaan Pythagoraan (569-475 eKr) lause.

[1] FILE: ~/ComplexAnalysis/CA12/d12/ ft201212.tex — 18. huhtikuuta 2012 (klo 8.09).